

Logica per la Programmazione

Lezione 4

- ▶ Dimostrazione di Implicazioni Tautologiche
 - ▶ Principio di sostituzione per l'implicazione
 - ▶ Occorrenze positive e negative
 - ▶ Altre tecniche di dimostrazione
 - ▶ Forme Normali

Tecniche di Dimostrazione di Equivalenze

- ▶ Abbiamo visto vari esempi di dimostrazioni per sostituzione, dove ogni passo era un'equivalenza:

- ▶ Per dimostrare che $P \equiv Q$ possiamo partire da P e arrivare a Q :

$$P \equiv \dots \equiv Q$$

Oppure possiamo ridurre sia P che Q a una formula comune R :

$$P \equiv \dots \equiv R \qquad Q \equiv \dots \equiv R$$

- ▶ Per dimostrare che una formula proposizionale P (che non ha \equiv come connettivo principale) è una tautologia, possiamo mostrare che è equivalente a **T**:

$$P \equiv \dots \equiv \mathbf{T}$$

Verso dimostrazioni con implicazioni

Vediamo che se la formula è del tipo $P \Rightarrow Q$, allora si può dimostrare anche usando una catena di equivalenze/implicazioni:

$$P \equiv \dots \Rightarrow \dots \Rightarrow \dots \equiv Q$$

Introduciamo alcune leggi utili:

- ▶ Hanno un'implicazione come connettivo principale
- ▶ Usate come giustificazioni in prove di implicazioni
- ▶ *Diamo anche forma disambiguata con parentesi*

$$(P \Rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q \quad (\text{Modus Ponens}) \quad ((P \Rightarrow Q) \wedge P) \Rightarrow Q$$

$$P \wedge Q \Rightarrow P \quad (\text{Sempl.- } \wedge) \quad (P \wedge Q) \Rightarrow P$$

$$P \Rightarrow P \vee Q \quad (\text{Intro.- } \vee) \quad P \Rightarrow (P \vee Q)$$

Correttezza di Modus Ponens e di Sempl.- \wedge

	$P \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$	(Modus Ponens)
\equiv	$P \wedge (\neg P \vee Q) \Rightarrow Q$	{ (Elim.- \Rightarrow) }
\equiv	$P \wedge Q \Rightarrow Q$	{ (Complemento) }
\equiv	$\neg(P \wedge Q) \vee Q$	{ (Elim.- \Rightarrow) }
\equiv	$\neg P \vee \neg Q \vee Q$	{ (De Morgan) }
\equiv	$\neg P \vee \neg Q \vee Q$	{ (Terzo Escluso), (Zero) }
T		

Verso la Dimostrazione di Implicazioni Tautologiche

- Posso impostare la dimostrazione che $P_1 \Rightarrow P_k$

P_1	
\equiv	giustificazione
	...
\equiv	giustificazione
	P
\Rightarrow	$\{P \Rightarrow Q\}$
	Q
\equiv	giustificazione
	...
\equiv	giustificazione
P_k	

Esempio - Tollendo Ponens

- ▶ Usando la legge (Sempl.- \wedge) $P \wedge Q \Rightarrow P$ possiamo dimostrare

$$(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q \quad (\text{Tollendo Ponens})$$

Partiamo dalla premessa dell'implicazione:

$$(P \vee Q) \wedge \neg P$$

$$\equiv \quad \{ (\text{Doppia Negazione}) \text{ e } (\text{Complemento}) \}$$

$$Q \wedge \neg P$$

$$\Rightarrow \quad \{ (\text{Sempl.-}\wedge) \}$$

$$Q$$

- ▶ Si noti che abbiamo applicato (Sempl.- \wedge) all'intera proposizione $Q \wedge \neg P$

Vale un Principio di Sostituzione per l'Implicazione?

- ▶ Il **principio di sostituzione per l'equivalenza** stabilisce che

“Se $P \equiv Q$, allora $R \equiv R[Q/P]$ ”

$$\frac{P \equiv Q}{R \equiv R[Q/P]}$$

- ▶ E valido un analogo principio di sostituzione per l'implicazione?

“Se $P \Rightarrow Q$, allora $R \Rightarrow R[Q/P]$ ” (???)

$$\frac{P \Rightarrow Q}{R \Rightarrow R[Q/P]} \quad (???)$$

- ▶ In generale **NO**. Infatti:

$$\begin{array}{l} \Rightarrow \\ U \wedge V \Rightarrow Z \\ U \Rightarrow Z \end{array} \quad \begin{array}{l} \{(\text{Sempl.} \wedge)\} \\ \\ \text{NO!!} \end{array}$$

U	V	Z	$(U \wedge V \Rightarrow Z)$	\Rightarrow	$(U \Rightarrow Z)$
1	0	0	1	0	0
(1)	(2)	(1)	(3)	(1)	(4)
				(1)	(2)
				(1)	(1)

Analogia con Disuguaglianze Algebriche

- ▶ Situazione analoga con disuguaglianze algebriche
- ▶ Quali delle seguenti deduzioni sono corrette?

$$\leq \frac{a - c}{b - c} \quad \{a \leq b\}$$

OK

$$\leq \frac{a - c}{a - d} \quad \{c \leq d\}$$

NO!!!

$$\geq \frac{a - c}{a - d} \quad \{c \leq d\}$$

OK

- ▶ Si noti che **a** compare *positivamente* in **(a - c)**, ma **c** vi compare *negativamente*. Per questo nel secondo caso il segno di disuguaglianza va invertito.

Occorrenze Positive e Negative

- ▶ Definizione: la formula proposizionale P **occorre positivamente** in

$$P \quad P \vee Q \quad P \wedge Q \quad Q \Rightarrow P$$

- ▶ mentre P **occorre negativamente** in

$$\neg P$$

$$P \Rightarrow Q \quad (\text{si ricordi che } P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q)$$

- ▶ Se P compare in una formula R a livello più profondo, si contano le occorrenze negative da P fino alla radice di R :
 - ▶ se sono pari, allora P **occorre positivamente** in R
 - ▶ se sono dispari, allora P **occorre negativamente** in R
- ▶ Attenzione: se P compare più volte in R , bisogna considerare separatamente le occorrenze: ognuna di esse può essere positiva o negativa indipendentemente dalle altre

Esempi

Come occorre P in $P \Rightarrow ((\neg P) \Rightarrow Q) ?$

Sottolineamo le occorrenze negative: $\underline{P} \Rightarrow ((\underline{\neg P}) \Rightarrow Q)$

La prima occorrenza di P compare **negativamente**, mentre la seconda compare **positivamente**. L'unica occorrenza di Q compare invece **positivamente**. Notare che la proposizione analizzata è infatti equivalente a

$$\neg P \vee (P \vee Q)$$

Come occorrono P e Q in $(P \Rightarrow (\neg P)) \Rightarrow Q ?$

$$(\underline{P} \Rightarrow (\underline{\neg P})) \Rightarrow Q$$

Sia le due occorrenze di P , che l'unica occorrenza di Q compaiono **positivamente**. Notare che la proposizione analizzata è infatti equivalente a

$$(P \wedge P) \vee Q$$

Occorrenze Positive e Negative: Esempi

- ▶ Come occorre P nelle seguenti proposizioni?
 - ▶ $(P \wedge P \wedge R) \vee S$
 - ▶ $Q \Rightarrow \neg(P \wedge R)$
 - ▶ $(\neg P \vee Q \Rightarrow R) \Rightarrow S$
 - ▶ $\neg P \vee Q \Rightarrow (R \Rightarrow S)$
 - ▶ $P \wedge Q \Rightarrow P \vee Q$
- ▶ Se ci sono più occorrenze di P , indicheremo esplicitamente quale ci interessa.
 - ▶ $P \Rightarrow (Q \vee P \Rightarrow Q \vee \neg S)$
 - ▶ $p \Rightarrow (Q \vee P \Rightarrow Q \vee \neg S)$

Principio di Sostituzione per l'Implicazione

Possiamo ora enunciare in modo corretto il **Principio di Sostituzione dell'Implicazione** che prevede due casi

- ▶ Se abbiamo stabilito che
 - ▶ $P \Rightarrow Q$
 - ▶ P occorre **positivamente** in R

allora vale

$$R \Rightarrow R[Q/P]$$

$P \Rightarrow Q,$ $P \text{ occorre positivamente in } R$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> $R \Rightarrow R[Q/P]$
--

- ▶ Se abbiamo stabilito che
 - ▶ $P \Rightarrow Q$
 - ▶ P occorre **negativamente** in R

allora vale

$$R \Leftarrow R[Q/P]$$

$P \Rightarrow Q,$ $P \text{ occorre negativamente in } R$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> $R \Leftarrow R[Q/P]$

Dimostrazione di Implicazioni: esempi

- ▶ $(P \Rightarrow Q \wedge R) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$, usando $A \wedge B \Rightarrow A$ (Sempl.- \wedge)

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \wedge R \\ \Rightarrow \quad \quad \quad \{(Sempl.-\wedge) \text{ e } Q \wedge R \text{ occorre posit.}\} \\ P \Rightarrow Q \end{array}$$

- ▶ $(P \vee Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Partiamo dalla conseguenza, usando $A \Rightarrow A \vee B$ (Intro.- \vee)

$$\begin{array}{l} (P \Rightarrow R) \\ \Leftarrow \quad \quad \quad \{(Intro.-\vee) \text{ e } P \text{ occorre negat.}\} \\ P \vee Q \Rightarrow R \end{array}$$

Forme Normali

- ▶ Usando le leggi ogni proposizione può essere trasformata in una *forma normale*. Si considerano due tipi:

- ▶ Forma normale **coniuntiva**

$$(P_1 \vee P_2 \vee \dots) \wedge (Q_1 \vee Q_2 \vee \dots) \wedge \dots$$

- ▶ Forma normale **disgiuntiva**

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots) \vee (Q_1 \wedge Q_2 \wedge \dots) \vee \dots$$

dove $P_1, P_2, \dots, Q_1, Q_2, \dots$ sono variabili proposizionali, *eventualmente negate*

- ▶ Utili per dimostrare equivalenza di formule, riducendole in forma normale e verificando se sono equivalenti
- ▶ Spesso ridurre a forma normale aumenta la dimensione della formula, perché bisogna usare distributività

Il Principio di Risoluzione

- ▶ $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \Rightarrow (Q \vee R)$ (Risoluzione)
- ▶ Questa legge permette di semplificare una formula in **forma normale congiuntiva**. È il meccanismo di calcolo alla base della **programmazione logica**.

$$\begin{array}{ll}
 & (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \\
 \equiv & \{(Elim.-\Rightarrow), 2 \text{ volte}\} \\
 & (\neg Q \Rightarrow P) \wedge (P \Rightarrow R) \\
 \Rightarrow & \{(Transitività-\Rightarrow)\} \\
 & \neg Q \Rightarrow R \\
 \equiv & \{(Elim.-\Rightarrow)\} \\
 & Q \vee R
 \end{array}$$

- ▶ Quindi la risoluzione corrisponde alla transitività dell'implicazione

Altre dimostrazioni del Principio di Risoluzione

Vediamo una dimostrazione standard del Principio di Risoluzione, in cui partiamo dalla premessa e la semplifichiamo fino ad arrivare alla conseguenza.

$$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \Rightarrow (Q \vee R) \text{ (Risoluzione)}$$

Partiamo quindi dalla premessa:

$$\begin{aligned} & (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \\ \equiv & \quad \{(Distributività)\} \\ & ((P \vee Q) \wedge \neg P) \vee ((P \vee Q) \wedge R) \\ \equiv & \quad \{(Complemento)\} \\ & (Q \wedge \neg P) \vee ((P \vee Q) \wedge R) \\ \Rightarrow & \quad \{(Sempl-\wedge), (Q \wedge \neg P) \text{ occorre positivamente}\} \\ & Q \vee ((P \vee Q) \wedge R) \\ \Rightarrow & \quad \{(Sempl-\wedge), ((P \vee Q) \wedge R) \text{ occorre positivamente}\} \\ & Q \vee R \end{aligned}$$

Altre dimostrazioni del Principio di Risoluzione

Ora dimostriamo la stessa formula riducendola a **T**, usando gli stessi passaggi della dimostrazione precedente. Si noti il verso delle implicazioni.

$$\begin{aligned}
 & (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \Rightarrow (Q \vee R) && \equiv PR \\
 \equiv & \quad \{(Distributività)\} \\
 & ((P \vee Q) \wedge \neg P) \vee ((P \vee Q) \wedge R) \Rightarrow (Q \vee R) \\
 \equiv & \quad \{(Complemento)\} \\
 & (Q \wedge \neg P) \vee ((P \vee Q) \wedge R) \Rightarrow (Q \vee R) \\
 \Leftarrow & \quad \{(Sempl-\wedge), (Q \wedge \neg P) \text{ occorre negativamente}\} \\
 & Q \vee ((P \vee Q) \wedge R) \Rightarrow (Q \vee R) \\
 \Leftarrow & \quad \{(Sempl-\wedge), ((P \vee Q) \wedge R) \text{ occorre negativamente}\} \\
 & Q \vee R \Rightarrow (Q \vee R) \\
 \equiv & \quad \{(Riflessività-\Rightarrow)\} \\
 & \mathbf{T}
 \end{aligned}$$

Si noti che abbiamo dimostrato che $\mathbf{T} \Rightarrow PR$. Poichè $PR \Rightarrow \mathbf{T}$ è banalmente vero, questo è sufficiente per mostrare che PR è una tautologia.