

Logica per la Programmazione

Lezione 3

- ▶ Dimostrazione di Tautologie e Sintassi del Calcolo Proposizionale
 - ▶ Antonio, Corrado e Bruno... formalmente
 - ▶ Tautologie: dimostrazioni e controesempi
 - ▶ Sintassi del Calcolo Proposizionale
 - ▶ Ambiguità, precedenza tra connettivi e parentesi

Dimostrazioni di Tautologie: torniamo all'esempio del Test

► Premesse:

- Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio; $(C \Rightarrow A)$
- Condizione necessaria perché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno. $(A \Rightarrow B)$

► Il giorno successivo possiamo affermare con certezza che:

- Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno. $(C \Rightarrow B)$
- Nessuno dei tre amici è andato al cinema. $(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$
- Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado $(B \Rightarrow C)$
- Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno. $(\neg C \Rightarrow \neg B)$

Come possiamo essere certi della risposta?

- ▶ Bisogna determinare quale delle ultime 4 formule è *conseguenza logica* delle premesse, cioè quale delle seguenti formule è una tautologia:
 1. $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow B)$
 2. $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$
 3. $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
 4. $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\neg C \Rightarrow \neg B)$
- ▶ Si possono verificare con tabelle di verità o dimostrazioni, usando le leggi viste.
- ▶ Mostriamo che (1) è una tautologia, e che (2), (3) e (4) non sono tautologie

La (1) è una Tautologia (Transitività dell'implicazione)

| | |
|---|--|
| $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow B)$ | |
| $\equiv \neg((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \vee (C \Rightarrow B)$ | {{(Elim.- \Rightarrow)}} |
| $\equiv \neg((\neg C \vee A) \wedge (\neg A \vee B)) \vee (\neg C \vee B)$ | {{(Elim.- \Rightarrow)}, 3 volte} |
| $\equiv \neg(\neg C \vee A) \vee \neg(\neg A \vee B) \vee (\neg C \vee B)$ | {{(De Morgan)}} |
| $\equiv (C \wedge \neg A) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg C \vee B)$ | {{(De Morgan) 2 volte, (Doppia Neg.)}} |
| $\equiv ((C \wedge \neg A) \vee \neg C) \vee ((A \wedge \neg B) \vee B)$ | {{(Comm.), (Assoc.)}} |
| $\equiv ((C \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg C)) \vee ((A \vee B) \wedge (\neg B \vee B))$ | {{(Distr.)}} |
| $\equiv (\mathbf{T} \wedge (\neg A \vee \neg C)) \vee ((A \vee B) \wedge \mathbf{T})$ | {{(Terzo Escluso)}} |
| $\equiv (\neg A \vee \neg C) \vee (A \vee B)$ | {{(Unità)}} |
| $\equiv (\mathbf{T} \vee \neg C) \vee B$ | {{(Terzo Escluso)}} |
| $\equiv \mathbf{T}$ | {{(Dominanza)}} |

Come si vede che una Formula non è una Tautologia?

- ▶ Esempio: (3) $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
- ▶ Basta trovare un'interpretazione che la rende falsa
- ▶ Evitare di costruire l'intera tabella di verità!!!
 - ▶ Determiniamo valori di verità per A , B e C che rendano falsa la formula
 - ▶ Poiché è un'implicazione, è falsa solo quando la premessa è vera e la conseguenza è falsa
 - ▶ Quindi $(B \Rightarrow C)$ deve essere falso, quindi $\{B \mapsto \mathbf{1}, C \mapsto \mathbf{0}\}$
 - ▶ A questo punto si vede che per qualunque valore di A la premessa è vera.
 - ▶ Quindi le seguenti interpretazioni rendono la formula falsa:
 $\{A \mapsto \mathbf{1}, B \mapsto \mathbf{1}, C \mapsto \mathbf{0}\}$ e $\{A \mapsto \mathbf{0}, B \mapsto \mathbf{1}, C \mapsto \mathbf{0}\}$

Come si vede che una Formula non è una Tautologia? (2)

Mostrare che $((A \Rightarrow B) \wedge \neg A) \Rightarrow B$ non è una tautologia

- ▶ Poiché è un'implicazione, è falsa solo quando la premessa è vera e la conseguenza è falsa
- ▶ Quindi $\{B \mapsto \mathbf{0}\}$
- ▶ La premessa è una congiunzione: per essere vera entrambi gli argomenti devono essere veri
- ▶ $\neg A$ è vera solo se $\{A \mapsto \mathbf{0}\}$
- ▶ Quindi abbiamo trovato l'interpretazione $\{A \mapsto \mathbf{0}, B \mapsto \mathbf{0}\}$
- ▶ Resta da controllare che renda la formula falsa

Tautologia o no?

La formula $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$ è una tautologia oppure no?

- ▶ Proviamo a mostrare che non lo è, cercando un controesempio. Poiché è un'implicazione, è falsa solo quando la premessa è vera e la conseguenza è falsa
- ▶ Quindi $\{B \mapsto \mathbf{0}\}$
- ▶ La premessa è una congiunzione: per essere vera entrambi gli argomenti devono essere veri
- ▶ Quindi $\{A \mapsto \mathbf{1}\}$
- ▶ Ma l'interpretazione trovata, $\{A \mapsto \mathbf{1}, B \mapsto \mathbf{0}\}$ non rende falsa la formula, perché $A \Rightarrow B$ è falso.
- ▶ Infatti la formula è una tautologia, come si può dimostrare facilmente, e viene chiamata **Modus Ponens**.

Altre Leggi utili: Leggi di Complemento

$$\begin{aligned}
 p \vee (\neg p \wedge q) &\equiv p \vee q && \text{(Complemento)} \\
 p \wedge (\neg p \vee q) &\equiv p \wedge q
 \end{aligned}$$

Dimostrazione di $p \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \vee q$

$$\begin{aligned}
 & p \vee (\neg p \wedge q) \\
 \equiv & && \{(Distr.)\} \\
 & (p \vee \neg p) \wedge (p \wedge q) \\
 \equiv & && \{(Terzo Escluso)\} \\
 & \mathbf{T} \wedge (p \wedge q) \\
 \equiv & && \{(Unit\grave{a})\} \\
 & (p \wedge q)
 \end{aligned}$$

Leggi di Assorbimento

$$\begin{aligned}
 p \wedge (p \vee q) &\equiv p \quad (\text{Assorbimento}) \\
 p \vee (p \wedge q) &\equiv p
 \end{aligned}$$

Dimostrazione di $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

$$\begin{aligned}
 & p \wedge (p \vee q) \\
 \equiv & & \{(Unit\grave{a})\} \\
 & (p \vee \mathbf{F}) \wedge (p \vee q) \\
 \equiv & & \{(Distr.)\} \\
 & p \vee (\mathbf{F} \wedge q) \\
 \equiv & & \{(Zero)\} \\
 & p \vee \mathbf{F} \\
 \equiv & & \{(Unit\grave{a})\} \\
 & p
 \end{aligned}$$

Sintassi del Calcolo Proporzionale, nuovamente...

- ▶ Formule Proporzionali definite dalla seguente grammatica:

$$\begin{aligned}
 \langle Prop \rangle & ::= \langle Prop \rangle \equiv \langle Prop \rangle \mid \langle Prop \rangle \wedge \langle Prop \rangle \mid \\
 & \quad \langle Prop \rangle \vee \langle Prop \rangle \mid \langle Prop \rangle \Rightarrow \langle Prop \rangle \mid \\
 & \quad \langle Prop \rangle \Leftarrow \langle Prop \rangle \mid \langle Atom \rangle \mid \neg \langle Atom \rangle \\
 \langle Atom \rangle & ::= \mathbf{T} \mid \mathbf{F} \mid \langle Ide \rangle \mid (\langle Prop \rangle) \\
 \langle Ide \rangle & ::= p \mid q \mid \dots \mid P \mid Q \mid \dots
 \end{aligned}$$

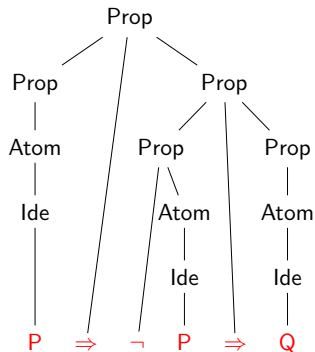
- ▶ *Categorie sintattiche*: $\langle Prop \rangle$ (iniziale), $\langle Atom \rangle$, $\langle Ide \rangle$
- ▶ Tutti gli altri simboli sono *terminali*: $\equiv, \wedge, \dots, \neg, (,), \mathbf{T}, \mathbf{F}, p, q, \dots$
- ▶ Esempio di **derivazione**: $\langle Prop \rangle \rightarrow^* P \Rightarrow \neg P \Rightarrow Q$
- ▶ Esempio di **albero di derivazione**: $P \Rightarrow \neg P \Rightarrow Q$
- ▶ Esempio di valutazione della formula usando albero di derivazione

Esempio di Derivazione

| | | |
|---------------|---|--|
| \rightarrow | <u>$\langle Prop \rangle$</u> | $\{\langle Prop \rangle ::= \langle Prop \rangle \Rightarrow \langle Prop \rangle\}$ |
| \rightarrow | <u>$\langle Prop \rangle \Rightarrow \langle Prop \rangle$</u> | $\{\langle Prop \rangle ::= \langle Atom \rangle\}$ |
| \rightarrow | <u>$\langle Atom \rangle \Rightarrow \langle Prop \rangle$</u> | $\{\langle Atom \rangle ::= \langle Ide \rangle, \langle Ide \rangle ::= P\}$ |
| \rightarrow | $P \Rightarrow$ <u>$\langle Prop \rangle$</u> | $\{\langle Prop \rangle ::= \langle Prop \rangle \Rightarrow \langle Prop \rangle\}$ |
| \rightarrow | $P \Rightarrow \langle Prop \rangle \Rightarrow$ <u>$\langle Prop \rangle$</u> | $\{\langle Prop \rangle ::= \langle Atom \rangle, \langle Atom \rangle ::= \langle Ide \rangle\}$ |
| \rightarrow | $P \Rightarrow \langle Prop \rangle \Rightarrow$ <u>$\langle Ide \rangle$</u> | $\{\langle Ide \rangle ::= Q\}$ |
| \rightarrow | $P \Rightarrow$ <u>$\langle Prop \rangle \Rightarrow Q$</u> | $\{\langle Prop \rangle ::= \neg \langle Atom \rangle, \langle Atom \rangle ::= \langle Ide \rangle\}$ |
| \rightarrow | $P \Rightarrow \neg$ <u>$\langle Ide \rangle \Rightarrow Q$</u> | $\{\langle Ide \rangle ::= P\}$ |
| \rightarrow | $P \Rightarrow \neg P \Rightarrow Q$ | |

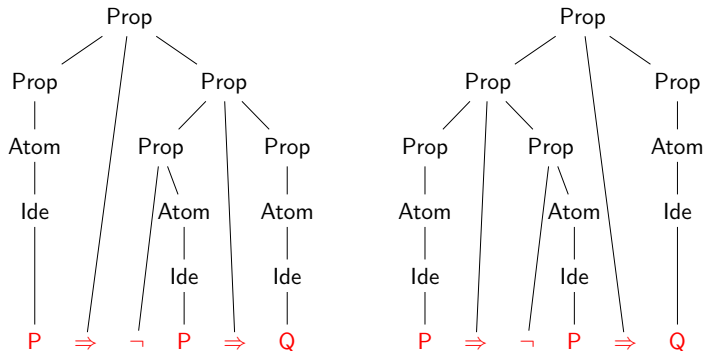
Esempio di Derivazione e Albero di Derivazione

| | | |
|---|----------------------------|--|
| → | <u>⟨Prop⟩</u> | {⟨Prop⟩ ::= ⟨Prop⟩ ⇒ ⟨Prop⟩} |
| → | <u>⟨Prop⟩</u> ⇒ ⟨Prop⟩ | {⟨Prop⟩ ::= ⟨Atom⟩} |
| → | <u>⟨Atom⟩</u> ⇒ ⟨Prop⟩ | {⟨Atom⟩ ::= ⟨Ide⟩, ⟨Ide⟩ ::= P} |
| → | P ⇒ <u>⟨Prop⟩</u> | {⟨Prop⟩ ::= ⟨Prop⟩ ⇒ ⟨Prop⟩} |
| → | P ⇒ ⟨Prop⟩ ⇒ <u>⟨Prop⟩</u> | {⟨Prop⟩ ::= ⟨Atom⟩, ⟨Atom⟩ ::= ⟨Ide⟩} |
| → | P ⇒ ⟨Prop⟩ ⇒ <u>⟨Ide⟩</u> | {⟨Ide⟩ ::= Q} |
| → | P ⇒ <u>⟨Prop⟩</u> ⇒ Q | {⟨Prop⟩ ::= ¬⟨Atom⟩, ⟨Atom⟩ ::= ⟨Ide⟩} |
| → | P ⇒ ¬ <u>⟨Ide⟩</u> ⇒ Q | {⟨Ide⟩ ::= P} |
| → | P ⇒ ¬P ⇒ Q | |



Ambiguità della Grammatica: un Esempio

- La formula $P \Rightarrow \neg P \Rightarrow Q$ ha due alberi di derivazione diversi, che forniscono valori diversi per la stessa interpretazione $P \mapsto 0, Q \mapsto 0$.



- Esercizio: mostrare che la prima è una tautologia, la seconda no

Precedenza tra Connettivi

- ▶ Stabiliamo i seguenti livelli di precedenza tra connettivi logici, per disambiguare le proposizioni:

| <i>operatore</i> | <i>livello di precedenza (crescente)</i> |
|---------------------------|--|
| \equiv | 0 |
| \Rightarrow, \Leftarrow | 1 |
| \wedge, \vee | 2 |
| \neg | 3 |

- ▶ Per esempio,
 - ▶ $(P \Rightarrow (Q \wedge R)) \equiv ((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R))$ si può scrivere come $P \Rightarrow Q \wedge R \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$
- ▶ Si noti che **non** stabiliamo
 - ▶ una precedenza tra \wedge e \vee
 - ▶ regole di associatività per connettivi binari ($\wedge, \vee, \Rightarrow, \dots$)

Come leggere le formule...

▶ $P \wedge Q \Rightarrow R \equiv R \vee P \Rightarrow S$

Ok, per le regole di precedenza diventa $((P \wedge Q) \Rightarrow R) \equiv ((R \vee P) \Rightarrow S)$

▶ $P \wedge Q \wedge R$

La formula è *sintatticamente ambigua* (ha due alberi di derivazione) ma per (Associatività- \wedge) abbiamo $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$, quindi la consideriamo **sintatticamente corretta**

▶ $P \wedge Q \vee R$

Sintatticamente errata!!! Mostrare che $(P \wedge Q) \vee R$ e $P \wedge (Q \vee R)$ non sono equivalenti.

▶ $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ **Sintatticamente errata!!!**

▶ $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ Ok, si legge $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$ (Elim- \Rightarrow),
ma attenzione quando si applica!

$P \Rightarrow Q \wedge R$ \equiv $\neg P \vee (Q \wedge R)$

Altre leggi utili

$$P \wedge Q \Rightarrow P \quad (\text{Sempl} - \wedge)$$

$$P \Rightarrow P \vee Q \quad (\text{Intro} - \vee)$$

$$P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P \quad (\text{Contropositiva})$$

$$(P \equiv Q) \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \quad (\text{Elim} - \equiv - \text{bis})$$

$$P \wedge Q \Rightarrow R \equiv P \wedge \neg R \Rightarrow \neg Q \quad (\text{Scambio})$$