

# Logica per la Programmazione

## Lezione 2

- ▶ Dimostrazione di Tautologie
  - ▶ Tabelle di Verità
  - ▶ Dimostrazioni per sostituzione
  - ▶ Leggi del Calcolo Proposizionale
- ▶ Insiemi funzionalmente completi di connettivi

## Dimostrazione di Tautologie

**Abbiamo detto che:** Per dimostrare che  $P$  è una tautologia possiamo:

- ▶ Usare le tabelle di verità, sfruttando quelle dei connettivi
  - ▶ Del tutto meccanico, richiede di considerare  $2^n$  casi, dove  $n$  è il numero di variabili proposizionali in  $P$
- ▶ Cercare di costruire una dimostrazione
  - ▶ Usando delle leggi (tautologie già dimostrate)
  - ▶ Usando opportune *regole di inferenza*
  - ▶ Si possono impostare vari tipi di dimostrazioni
- ▶ Mostrare che non è una tautologia
  - ▶ individuando valori delle variabili proposizionali che rendono falsa  $P$

**Vediamo come si costruiscono le tabelle di verità**

## Interpretazione di una Formula Proporzionale

- ▶ **Interpretazione:** funzione da variabili proposizionali a  $\{0, 1\}$   
Nota: useremo  $F$  e  $T$  nelle formule, ma **0** e **1** per *falso* e *vero* nella semantica
- ▶ Esempio:
  - ▶ Formula  $(P \wedge Q) \vee \neg R$
  - ▶ Interpretazione  $\{P \mapsto 1, Q \mapsto 0, R \mapsto 0\}$
- ▶ Si può calcolare il valore di verità della formula nell'interpretazione usando le tavole di verità dei connettivi logici:

$P$	$Q$	$R$		$((P \wedge Q) \vee \neg R)$
1	0	0		1 0 0 <b>1</b> 1 0
(1)	(2)	(1)		<b>(3)</b> (2)    (1)

$P$	$Q$		$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \equiv Q$	$P \Leftarrow Q$
1	1		0	1	1	1	1	1
1	0		0	0	1	0	0	1
0	1		1	0	1	1	0	0
0	0		1	0	0	1	1	1

## Tabella di verità di una formula proposizionale

- ▶ La tabella di verità raccoglie tutte le possibili interpretazioni
- ▶ Un esempio:  $((P \wedge Q) \vee \neg R)$

$P$	$Q$	$R$	$((P \wedge Q) \vee \neg R)$
1	1	1	<b>1</b>
1	1	0	<b>1</b>
1	0	1	<b>0</b>
1	0	0	<b>1</b>
0	1	1	<b>0</b>
0	1	0	<b>1</b>
0	0	1	<b>0</b>
0	0	0	<b>1</b>

  

(1)	(2)	(1)	(3)	(2)	(1)
-----	-----	-----	-----	-----	-----

# Dimostrazione di Tautologie

**Abbiamo detto che:** Per dimostrare che  $P$  è una tautologia possiamo:

- ▶ Usare le tabelle di verità, sfruttando quelle dei connettivi
  - ▶ Del tutto meccanico, richiede di considerare  $2^n$  casi, dove  $n$  è il numero di variabili proposizionali in  $P$
- ▶ **Cercare di costruire una dimostrazione**
  - ▶ **Usando delle leggi (tautologie già dimostrate)**
  - ▶ **Usando opportune regole di inferenza**
  - ▶ **Si possono impostare vari tipi di dimostrazioni**
- ▶ Mostrare che non è una tautologia
  - ▶ individuando valori delle variabili proposizionali che rendono falsa  $P$

## Dimostrazioni per Sostituzione: cominciamo dall'Aritmetica

- Mostriamo che  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$$(a + b)(a - b)$$

= (distributività  $(x + y)z = xz + yz$ ) con sostituzione

$$\{x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto (a - b)\}$$

$$\underline{a(a - b)} + \underline{b(a - b)}$$

= (distributività  $x(y - z) = xy - xz$ ), due volte, la prima volta con sostituzione  $\{x \mapsto a, y \mapsto a, z \mapsto b\}$  e la seconda con

$$\{x \mapsto b, y \mapsto a, z \mapsto b\}$$

$$\underline{(aa - ab)} + \underline{(ba - bb)}$$

= (quadrato  $xx = x^2$ ), due volte, e (associatività) della somma

$$\underline{a^2 - ab} + \underline{ba - b^2}$$

= (commutatività) del prodotto, e (differenza  $-x + x = 0$ )

$$\underline{a^2 + 0} - b^2$$

= (elemento neutro  $x + 0 = x$ )

$$a^2 - b^2$$

## Struttura di una semplice Dimostrazione

Nella dimostrazione vista abbiamo

- ▶ una sequenza di eguaglianze
    - ▶ es:  $a^2 + 0 - b^2 = a^2 - b^2$
  - ▶ ogni eguaglianza ha come giustificazione una o più **leggi** (dell'aritmetica)
    - ▶ es:  $x + 0 = x$
  - ▶ La correttezza di ogni eguaglianza è basata su una **regola di inferenza**: **il principio di sostituzione**
- Informalmente:

**“Sostituendo eguali con eguali il valore non cambia”**

- ▶ es: dalla legge (con sostituzione  $\{x \mapsto a^2\}$ ) sappiamo che  $a^2 + 0 = a^2$
- ▶ quindi per il principio di sostituzione abbiamo  $a^2 + 0$   $- b^2 =$   $a^2$   $- b^2$

## Principio di Sostituzione

- ▶ Esprime una proprietà fondamentale dell'**eguaglianza**.
- ▶ **“Se sappiamo che  $A = B$ , allora il valore di una espressione  $C$  in cui compare  $A$  non cambia se  $A$  è sostituito con  $B$ ”**

- ▶ in formule,
 
$$\frac{A = B}{C = C[B/A]}$$

- ▶ Qui  $A = B$  è una legge, e  $C = C[B/A]$  è l'eguaglianza da essa giustificata, grazie al principio di sostituzione
- ▶ Nel Calcolo Proposizionale esprime una proprietà dell'**equivalenza**:

$$\boxed{\frac{P \equiv Q}{R \equiv R[Q/P]}}$$

- ▶ A volte scriviamo  $R_P^Q$  per  $R[Q/P]$



# Leggi del Calcolo Proporzionale

- ▶ Una **legge** è una tautologia.
- ▶ Di solito una tautologia viene chiamata “legge” quando descrive una proprietà di uno o più connettivi logici, o quando è usata come giustificazione nelle dimostrazioni.
- ▶ Per ogni legge che introduciamo, bisognerebbe verificare che sia una tautologia
  - ▶ a volte è ovvio
  - ▶ a volte lo mostreremo con tabelle di verità
  - ▶ a volte presenteremo una dimostrazione in cui usiamo **solo leggi introdotte in precedenza**
  - ▶ spesso lo lasceremo come esercizio...

## Leggi per l'Equivalenza

- ▶  $p \equiv p$  (Riflessività)
- ▶  $(p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$  (Simmetria)
- ▶  $((p \equiv q) \equiv r) \equiv (p \equiv (q \equiv r))$  (Associatività)
- ▶  $(p \equiv \mathbf{T}) \equiv p$  (Unità)
- ▶  $(p \equiv q) \wedge (q \equiv r) \Rightarrow (p \equiv r)$  (Transitività)
- ▶ **Esempio di dimostrazione:** (Unità), (Transitività)

$P$	$(P \equiv \mathbf{T})$	$\equiv$	$\mathbf{T}$	$\equiv$	$P$
1	1	1	1	<b>1</b>	1
0	0	0	1	<b>1</b>	0
	(1)	(2)	(1)	(3)	(1)

## Leggi per Congiunzione e Disgiunzione

$p \vee q \equiv q \vee p$	(Commutatività)
$p \wedge q \equiv q \wedge p$	
$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$	(Associatività)
$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	
$p \vee p \equiv p$	(Idempotenza)
$p \wedge p \equiv p$	
$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$	(Unità)
$p \vee \mathbf{F} \equiv p$	
$p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	(Zero) (Dominanza)
$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$	
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	(Distributività)
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	

- Esercizio: dimostrare alcune leggi con tabelle di verità

## Dimostrazioni di Equivalenze Tautologiche

- ▶ Come per equazioni algebriche si può provare  $\mathbf{P_1} \equiv \mathbf{P_n}$  nel modo seguente:

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{P_1} \\
 \equiv \quad \{ \text{giustificazione} \} \\
 P_2 \\
 \dots \\
 \equiv \quad \{ \text{giustificazione} \} \\
 \mathbf{P_n}
 \end{array}$$

- ▶ dove ogni passo ha la forma

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{R} \\
 \equiv \quad \{ P \equiv Q \} \\
 \mathbf{R[Q/P]}
 \end{array}$$

- ▶ Ogni passo è corretto per il *Principio di Sostituzione*

## Una Semplice Dimostrazione

$$\begin{aligned}
 & \textbf{Teorema: } p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee (p \vee r) \\
 & \quad (p \vee q) \vee (p \vee r) \\
 \equiv & \quad \{(p \vee q) \equiv (q \vee p) \text{ (Commutatività)}\} \\
 & \quad (q \vee p) \vee (p \vee r) \\
 \equiv & \quad \{(Associatività)\} \\
 & \quad q \vee (p \vee (p \vee r)) \\
 \equiv & \quad \{(Associatività)\} \\
 & \quad q \vee ((p \vee p) \vee r) \\
 \equiv & \quad \{(Idempotenza)\} \\
 & \quad q \vee (p \vee r) \\
 \equiv & \quad \{(Associatività)\} \\
 & \quad (q \vee p) \vee r \\
 \equiv & \quad \{(Commutatività)\} \\
 & \quad (p \vee q) \vee r \\
 \equiv & \quad \{(Associatività)\} \\
 & \quad p \vee (q \vee r)
 \end{aligned}$$

## Commenti

- ▶ La dimostrazione fatta usando le leggi garantisce la correttezza della dimostrazione grazie al *Principio di Sostituzione*
- ▶ Naturalmente la tecnica non automatizza le dimostrazioni. Rimane a carico nostro la scelta delle leggi da usare, da quale membro della equivalenza partire, l'organizzazione della sequenza dei passaggi
- ▶ Nel seguito semplificheremo le dimostrazioni, saltando passi ovvi come l'applicazione di Associatività, Commutatività e Idempotenza

## Leggi della Negazione

$$\neg(\neg p) \equiv p \quad (\text{Doppia Negazione})$$

$$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T} \quad (\text{Terzo escluso})$$

$$p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F} \quad (\text{Contraddizione})$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \quad (\text{De Morgan})$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg \mathbf{T} \equiv \mathbf{F} \quad (\mathbf{T}: \mathbf{F})$$

$$\neg \mathbf{F} \equiv \mathbf{T} \quad (\mathbf{F}: \mathbf{T})$$

- Esercizio: dimostrare alcune leggi con tabelle di verità

## Leggi di eliminazione dell'implicazione

▶ 
$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q) \quad (\text{Elim-} \Rightarrow)$$

▶ 
$$(p \equiv q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \quad (\text{Elim-} \equiv)$$

▶ 
$$(p \Leftarrow q) \equiv (q \Rightarrow p) \quad (\text{Elim-} \Leftarrow)$$



## Sulle Leggi del Calcolo Proposizionale

- ▶ Abbiamo visto le leggi per l'equivalenza ( $\equiv$ ), la congiunzione ( $\wedge$ ), la disgiunzione ( $\vee$ ), la negazione ( $\neg$ )
- ▶ Poi abbiamo visto le leggi per eliminare implicazione ( $\Rightarrow$ ), conseguenza ( $\Leftarrow$ ) ed equivalenza ( $\equiv$ )
- ▶ Si può mostrare che tutte le tautologie del Calcolo Proposizionale sono dimostrabili a partire dall'insieme delle leggi visto sinora
- ▶ Conviene comunque, per motivi di espressività e compattezza delle definizioni, introdurre altre leggi che corrispondono, per esempio, ad assodate tecniche di dimostrazione

## Insiemi Funzionalmente Completi di Connettivi Logici

- ▶ Abbiamo introdotto 6 diversi connettivi logici:

Connettivo	Forma simbolica	Operazione corrispondente
<i>not</i>	$\neg p$	<i>negazione</i>
<i>and, e</i>	$p \wedge q$	<i>coniunzione</i>
<i>or, o</i>	$p \vee q$	<i>disgiunzione</i>
<i>se p allora q</i>	$p \Rightarrow q$	<i>implicazione</i>
<i>p se e solo se q</i>	$p \equiv q$	<i>equivalenza</i>
<i>p se q</i>	$p \Leftarrow q$	<i>conseguenza</i>

- ▶ Alcuni possono essere definiti in termini di altri.
- ▶ Molti sottoinsiemi sono “funzionalmente completi” cioè permettono di derivare tutti gli altri.
- ▶ Vediamo che  $\{\wedge, \neg\}$  è funzionalmente completo.
- ▶ Esercizio: dimostrare che anche  $\{\vee, \neg\}$  e  $\{\Rightarrow, \neg\}$  sono funzionalmente completi.

## L'Insieme $\{\wedge, \neg\}$ è funzionalmente completo

- ▶ Occorre mostrare che una qualunque formula proposizionale è equivalente a una formula che contiene solo  $\{\wedge, \neg\}$ .
- ▶ Per induzione strutturale sulla sintassi delle formule
  - ▶ Ricordiamo la sintassi:

$$\begin{aligned}
 \text{Prop} &::= \text{Prop} \equiv \text{Prop} \mid \text{Prop} \wedge \text{Prop} \mid \text{Prop} \vee \text{Prop} \mid \\
 &\quad \text{Prop} \Rightarrow \text{Prop} \mid \text{Prop} \Leftarrow \text{Prop} \\
 &\quad \text{Atom} \mid \neg \text{Atom} \\
 \text{Atom} &::= \mathbf{T} \mid \mathbf{F} \mid \text{Ide} \mid (\text{Prop}) \\
 \text{Ide} &::= p \mid q \mid \dots \mid P \mid Q \mid \dots
 \end{aligned}$$

- ▶ implicazione ( $\Rightarrow$ ), conseguenza ( $\Leftarrow$ ) ed equivalenza ( $\equiv$ ): facile!
- ▶ **disgiunzione:**

$$\begin{aligned}
 &p \vee q \\
 \equiv & \quad \quad \quad \{(Doppia Neg.)\} \\
 &\neg \neg (p \vee q) \\
 \equiv & \quad \quad \quad \{(De Morgan)\} \\
 &\neg (\neg p \wedge \neg q)
 \end{aligned}$$

## Il Connettivo “NAND”

- ▶ Si consideri il connettivo proposizionale binario **nand** la cui semantica è definita dalla seguente tabella di verità:

$P$	$Q$	$P \text{ nand } Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- ▶ Esercizio: si provi che l'insieme  $\{\text{nand}\}$  è **funzionalmente completo**.