

Logica per la Programmazione
Corso di Laurea in INFORMATICA
a.a. 2015/16

Andrea Corradini e Francesca Levi

Dipartimento di Informatica

E-mail: andrea@di.unipi.it, francesca.levi@unipi.it

Informazioni Utili

- ▶ Docente: **Andrea Corradini** andrea@di.unipi.it
- ▶ Esercitazioni: **Maria Simi** + Andrea Corradini
- ▶ Orario Lezioni: **MAR 14-16 - GIO 11-13**
- ▶ Ricevimento studenti: **LUN 16-18 ?????** e su appuntamento
- ▶ Pagina web del corso:
<http://www.di.unipi.it/~andrea/Didattica/LPP-15/>
- ▶ Materiale didattico: dispense scaricabili dalla pagina web
- ▶ Superamento di LPP valido per assolvimento OFA
- ▶ Occorre superare 25 CFU (almeno 12 CFU INF/01, e almeno 9 CFU MAT/* o FIS/*) entro settembre per passare al secondo anno
- ▶ **LPP (6 CFU) è un corso INF/01**

La Logica

- ▶ La logica è la disciplina che studia le condizioni di correttezza del ragionamento

“Occorre dire, anzitutto, quale oggetto riguardi ed a quale disciplina spetti la presente indagine, che essa cioè riguarda la dimostrazione e spetta alla scienza dimostrativa: in seguito, bisogna precisare cosa sia la premessa, cosa sia il termine, cosa sia il sillogismo...” Aristotele

- ▶ Esempio di *sillogismo*
 - ▶ Tutti gli uomini sono mortali
 - ▶ Socrate è un uomo
 - ▶ Socrate è mortale

La Logica (cont.)

Non tutti i sillogismi sono validi:

- ▶ Tutti gli animali sono mortali
 - ▶ Pippo è mortale
 - ▶ Pippo è un animale
-
- ▶ Tutti gli dei sono immortali
 - ▶ Gli uomini non sono dei
 - ▶ Gli uomini sono mortali

Dalla Logica alla Matematica

- ▶ Nella seconda metà del XIX vengono sviluppate notazioni matematiche (algebriche) per trattare le operazioni della logica (George Boole, Augustus de Morgan, ...)
- ▶ Questo ha consentito di applicare la logica ai fondamenti della matematica, arrivando a interessanti controversie fondazionali (studiate negli anni 1900-25)
- ▶ In matematica, la logica è usata, tra l'altro, per
 - ▶ esprimere asserti in modo non ambiguo
Esempio: *tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi*

$$(\forall n. n \in \mathbb{N} \wedge \text{pari}(n) \wedge n > 2 \Rightarrow \sim \text{primo}(n))$$

- ▶ chiarire e formalizzare il concetto di dimostrazione

Logica Matematica e Informatica

- ▶ La logica matematica ha profondi legami con l'informatica:
 - ▶ l'informatica ha dato nuovo impulso allo studio della LM
 - ▶ la LM è parte integrante dei fondamenti teorici dell'informatica
- ▶ Usi della Logica Matematica in Informatica:
 - ▶ formalizzazione di requisiti
 - ▶ dimostrazione di proprietà di programmi (es: logica di Hoare)
 - ▶ fondamenti di programmazione dichiarativa (PROLOG)
 - ▶ rappresentazione della conoscenza (Intelligenza Artificiale)
 - ▶ fondamenti di strumenti di analisi e di verifica di sistemi
 - ▶ Model checking
 - ▶ Theorem proving

Contenuti del Corso

- ▶ Introduzione (già fatta!)
- ▶ Calcolo Proporzionale
 - ▶ Connettivi logici e loro proprietà
 - ▶ Tautologie, tecniche di dimostrazione
- ▶ Logica del Primo Ordine
 - ▶ Sintassi e semantica
 - ▶ Leggi e regole di inferenza per i quantificatori
 - ▶ Esempi da teoria degli insiemi e dominio dei naturali
- ▶ Quantificatori funzionali
 - ▶ min, max, cardinalità, sommatoria: leggi e dimostrazioni
- ▶ Triple di Hoare
 - http://it.wikipedia.org/wiki/Tony_Hoare
 - ▶ Un semplice linguaggio imperativo, semantica operativa
 - ▶ Verifica di proprietà di semplici programmi

Un Problema di Deduzione Logica [da un test di ingresso]

- ▶ Tre amici, Antonio, Bruno e Corrado, sono incerti se andare al cinema. Si sa che:
 - ▶ Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio;
 - ▶ Condizione necessaria affinché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno.
- ▶ Il giorno successivo possiamo affermare con certezza che:
 1. Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno
 2. Nessuno dei tre amici è andato al cinema
 3. Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado
 4. Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno
- ▶ *Come si formalizza? Come si può usare una dimostrazione per rispondere alla domanda?*

Il Calcolo Proposizionale

- ▶ È il nucleo di (quasi) tutte le logiche. Limitato potere espressivo, ma sufficiente per introdurre il concetto di dimostrazione.
- ▶ Una proposizione è un enunciato dichiarativo (per esempio una frase in linguaggio naturale) che “afferma qualcosa” e per il quale si può dire:

Principio del terzo escluso:

che è vero oppure è falso (non ci sono altre possibilità)

Principio di non contraddittorietà:

che non è al tempo stesso sia vero che falso.

“dichiarativi sono non già tutti i discorsi, ma quelli in cui sussiste una enunciazione vera oppure falsa” Aristotele

Esempi di Proposizioni “Atomiche”

1. Roma è la capitale d'Italia
2. La Francia è uno stato del continente asiatico
3. $1+1 = 2$
4. $2+2 = 3$

Esempi di Non Proposizioni

1. Che ora è?
2. Leggete queste note con attenzione
3. $x+1 = 2$

Connettivi Logici

Connettivo	Forma simbolica	Operazione corrispondente
<i>not</i>	$\neg p$	<i>negazione</i>
<i>and, e</i>	$p \wedge q$	<i>congiunzione</i>
<i>or, o</i>	$p \vee q$	<i>disgiunzione</i>
<i>se p allora q</i>	$p \Rightarrow q$	<i>implicazione</i>
<i>p se e solo se q</i>	$p \equiv q$	<i>equivalenza</i>
<i>p se q</i>	$p \Leftarrow q$	<i>conseguenza</i>

Sintassi delle Proposizioni (Grammatica)

$$\begin{aligned}
 \textit{Prop} & ::= \\
 & \quad \textit{Prop} \equiv \textit{Prop} \mid \textit{Prop} \wedge \textit{Prop} \mid \textit{Prop} \vee \textit{Prop} \mid \\
 & \quad \textit{Prop} \Rightarrow \textit{Prop} \mid \textit{Prop} \Leftarrow \textit{Prop} \\
 & \quad \textit{Atom} \mid \neg \textit{Atom} \\
 \textit{Atom} & ::= \\
 & \quad \mathbf{T} \mid \mathbf{F} \mid \textit{Ide} \mid (\textit{Prop}) \\
 \textit{Ide} & ::= \\
 & \quad p \mid q \mid \dots \mid P \mid Q \mid \dots
 \end{aligned}$$

Semantica (significato) delle Proposizioni

Tablelle di verità dei connettivi logici:

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \equiv Q$	$P \Leftarrow Q$
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	F	F
F	F	T	F	F	T	T	T

Si osservi in particolare il valore di verità di un'implicazione (o di una conseguenza)

Calcolo Proposizionale per formalizzare Enunciati: Esempio

- ▶ Tre amici, Antonio, Bruno e Corrado, sono incerti se andare al cinema.
 - ▶ Introduciamo tre proposizioni:
 - ▶ $A \equiv$ "Antonio va al cinema"
 - ▶ $B \equiv$ "Bruno va al cinema"
 - ▶ $C \equiv$ "Corrado va al cinema"
- ▶ Si sa che:
 - ▶ Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio;
 - ▶ $C \Rightarrow A$
- ▶ Condizione necessaria affinché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno.
 - ▶ $A \Rightarrow B$

Calcolo Proposizionale per formalizzare Enunciati: Esempio (cont.)

- ▶ Il giorno successivo possiamo affermare con certezza che:
 - ▶ Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno
 - ▶ $C \Rightarrow B$
 - ▶ Nessuno dei tre amici è andato al cinema
 - ▶ $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$
 - ▶ Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado
 - ▶ $B \Rightarrow C$
 - ▶ Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno
 - ▶ $\neg C \Rightarrow \neg B$
- ▶ Per rispondere alla domanda, dobbiamo capire quale di queste quattro proposizioni è *conseguenza logica* delle proposizioni precedenti

Formalizzazione di Enunciati: Esempi

- ▶ Piove e fa molto freddo

$P \equiv$ "piove", $R \equiv$ "fa freddo"

$$[P \wedge R]$$

- ▶ Fa freddo, ma non piove

$$[R \wedge \neg P]$$

- ▶ Se ci sono nuvole e non c'è vento, allora piove

$N \equiv$ "ci sono nuvole", $V \equiv$ "c'è vento"

$$[(N \wedge \neg V) \Rightarrow P]$$

- ▶ Piove solo se ci sono nuvole e non c'è vento

$$[P \Rightarrow (N \wedge \neg V)]$$

- ▶ Nevica, ma non fa freddo se ci si copre

$Ne \equiv$ "nevica", $C \equiv$ "ci si copre"

$$[Ne \wedge (\neg R \Leftarrow C)]$$

- ▶ Se ci si copre, allora fa freddo o nevica

$$[C \Rightarrow (R \vee Ne)]$$

Formalizzazione di Implicazioni in Linguaggio Naturale

Scrivere la proposizione rappresentata da ognuna delle seguenti frasi in italiano:

- | | |
|---|---------------------|
| ▶ Se P allora Q | $[P \Rightarrow Q]$ |
| ▶ P è una conseguenza di Q | $[Q \Rightarrow P]$ |
| ▶ P è condizione necessaria e sufficiente per Q | $[P \equiv Q]$ |
| ▶ P è condizione necessaria per Q | $[Q \Rightarrow P]$ |
| ▶ P è condizione sufficiente per Q | $[P \Rightarrow Q]$ |
| ▶ P vale solo se vale Q | $[P \Rightarrow Q]$ |
| ▶ P vale se vale Q | $[Q \Rightarrow P]$ |
| ▶ P vale se e solo se vale Q | $[P \equiv Q]$ |
| ▶ Condizione necessaria affinché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno | $[A \Rightarrow B]$ |

Tautologie e Contraddizioni

- ▶ Una **tautologia** è una formula del calcolo proposizionale che vale **T** per qualunque valore **T/F** assegnato alle variabili proposizionali
 - ▶ Esempio: $P \vee \neg P$ (vedi tabella di verità)
- ▶ Una **contraddizione** è una formula che vale **F** per qualunque valore **T/F** assegnato alle variabili proposizionali
- ▶ Quindi **P** è una tautologia se e solo se $\neg P$ è una contraddizione

Implicazioni e Equivalenze Tautologiche

- ▶ Diciamo che

p implica tautologicamente q
se e solo se
 $p \Rightarrow q$ è una tautologia

p è tautologicamente equivalente a q
se e solo se
 $p \equiv q$ è una tautologia

- ▶ Praticamente tutti i problemi nel Calcolo Proporzionale si riducono a dimostrare che una proposizione è una tautologia.
- ▶ Come si può dimostrare?

Dimostrazione di Tautologie

- ▶ Per dimostrare che p è una tautologia possiamo
 - ▶ Usare le tabelle di verità
 - ▶ Del tutto meccanico, richiede di considerare 2^n casi, dove n è il numero di variabili proposizionali in p
- ▶ Cercare di costruire una dimostrazione
 - ▶ Usando delle leggi (tautologie già dimostrate)
 - ▶ Usando opportune regole di *inferenza*
 - ▶ Si possono impostare vari tipi di dimostrazione
- ▶ Mostrare che non è una tautologia
 - ▶ individuando valori delle variabili proposizionali che rendono falsa p