

LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE – a.a. 2015/16

Quarta esercitazione — 24/11/2015

1. Si dimostri che le seguenti formule del primo ordine sono valide:

$$(a) \neg(\exists x.P(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge (\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \Rightarrow (\forall x.\neg R(x) \Rightarrow Q(x))$$

$$(b) (\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x.\neg S(x) \wedge R(x)) \Rightarrow \neg(\forall x.Q(x) \Rightarrow S(x))$$

$$(c) (\forall x.\neg(B(x) \Rightarrow \neg A(x))) \vee \neg(\exists x.A(x) \vee (\neg B(x) \Rightarrow A(x))) \Rightarrow (\forall x.A(x) \Rightarrow B(x))$$

$$(d) (\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \wedge (\neg(\exists x.R(x)) \vee (\forall x.Q(x))) \Rightarrow (\forall x.Q(x) \vee P(x))$$

$$(e) (\exists x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x.\neg(P(x) \vee Q(x))) \Rightarrow (\exists x.Q(x) \vee R(x) \Rightarrow \neg P(x))$$

2. Si fornisca per ognuno dei seguenti enunciati una formula del primo ordine che lo formalizza usando l'interpretazione standard sui naturali e ipotizzando che **bar** e **foo** siano due array con dominio rispettivamente $[0, n)$ e $[0, m)$:

(a) l'array **bar** ha al massimo un elemento minore di tutti gli elementi dell'array **foo**

(b) il primo elemento dell'array **foo**, se esiste, è proprio uguale al doppio della somma degli elementi pari dell'array **bar**

(c) se l'array **bar** contiene ogni numero che compare nell'array **foo** il doppio delle volte, allora la lunghezza di **bar** è almeno il doppio della lunghezza di **foo**

(d) La sequenza costituita dall'array **bar** seguito dall'array **foo** è strettamente crescente.

(e) l'array **bar** è l'array **foo** ordinato in senso crescente.

3. Si consideri il seguente array **a** con dominio $[0, 4)$:

7	6	11	4
---	---	----	---

Si dimostri, utilizzando più volte la legge dell'intervallo per la sommatoria, la validità della seguente formula:

$$m = (\sum x : x \in [0, 4) \wedge \text{pari}(\mathbf{a}[x]) . (\mathbf{a}[x] - 1)^2) \quad \equiv \quad m = 34$$