

Terza esercitazione — 29/10/2015

1. Si consideri l'alfabeto con simboli di costante $\{A, P\}$ e simboli di predicato binari $\{amici(-, -), = (-, -)\}$ e l'interpretazione (\mathcal{D}, α) , dove \mathcal{D} è l'insieme delle persone e
- $\alpha(A)$ = “la persona chiamata Andrea” e $\alpha(P)$ = “la persona chiamata Paolo”;
 - $\alpha(amici)(p, q)$ è vera se e solo se p e q sono amici;
 - $\alpha(=)(p, q)$ è vera se e solo se p e q sono la stessa persona.

Si fornisca per ognuno dei seguenti enunciati una formula del primo ordine che lo formalizza

- (a) “Tutti sono amici di se stessi”
- (b) “Tutti hanno qualcuno che è loro amico”
- (c) “Paolo ha un solo amico”
- (d) “Ogni amico di Paolo è amico di Andrea”
- (e) “Paolo non ha amici in comune con Andrea”

2. Per ognuno dei seguenti enunciati si fornisca un adeguato alfabeto del primo ordine, una interpretazione sul dominio delle persone e una formula del primo ordine che lo formalizza

- (a) “Ogni senatore ha un segretario, ma il senatore Razzi ne ha più di uno”
- (b) “Mario è zio di Lucia se è il fratello di sua madre o di suo padre”

3. Si calcoli, motivando la risposta, il valore di verità della formula

$$\Phi = (\forall z . P(z)) \vee (\forall y . (\exists x . Q(x, y) \wedge P(x)))$$

nell'interpretazione $I = (D, \alpha)$, dove $D = \{a, b, c\}$ ed α è definita come segue

$$\alpha(P)(z) = \begin{cases} T & \text{se } z \in \{a, b\}, \\ F & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad \alpha(Q)(z, v) = \begin{cases} T & \text{se } (z, v) \in \{(a, a), (c, a), (c, b), (b, c)\}, \\ F & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si calcoli cioè $I_{\rho_0}(\Phi)$ usando le regole della semantica del primo ordine, dove ρ_0 è un assegnamento arbitrario.

4. Per ognuno dei seguenti enunciati si fornisca un adeguato alfabeto del primo ordine, una interpretazione su un dominio da definire e una formula del primo ordine che lo formalizza

- (a) “Tutti gli studenti che superano l'esame di un corso lo hanno frequentato”
- (b) “Le squadre che non hanno passato la prima fase sono scarse, ma ci sono squadre scarse, come il Brasile, che hanno passato la prima fase”