

LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2015-2016

Secondo Appello - 11/02/2016 — Soluzioni Proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1

Si dica se le seguenti proposizioni sono tautologie oppure no. Se una proposizione è una tautologia, lo si deve dimostrare senza usare le tabelle di verità; altrimenti va prodotto un controesempio mostrando esplicitamente che rende la formula falsa.

1. $(\neg P \Rightarrow R) \wedge (S \vee Q \Rightarrow \neg P) \Rightarrow (\neg R \wedge \neg Q \Rightarrow \neg S)$
2. $(P \vee \neg R) \wedge (S \vee \neg Q \Rightarrow \neg P) \Rightarrow (S \Rightarrow \neg R) \wedge (R \Rightarrow \neg Q)$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1. La formula è una tautologia come mostrato di seguito. Consideriamo la premessa e modifichiamola usando (Contropositiva):

$$\begin{aligned}
 & (\neg P \Rightarrow R) \wedge (S \vee Q \Rightarrow \neg P) \\
 \equiv & \quad \{(Contropositiva), (Doppia Negazione), \text{due volte}\} \\
 & (\neg R \Rightarrow P) \wedge (P \Rightarrow \neg(S \vee Q)) \\
 \equiv & \quad \{(De Morgan)\} \\
 & (\neg R \Rightarrow P) \wedge (P \Rightarrow \neg S \wedge \neg Q)
 \end{aligned}$$

Ora dimostriamo la conseguenza $\neg R \wedge \neg Q \Rightarrow \neg S$ usando i due congiunti della premessa come ipotesi non tautologiche. Cominciamo dalla premessa $\neg R \wedge \neg Q$:

$$\begin{aligned}
 & \neg R \wedge \neg Q \\
 \Rightarrow & \quad \{\mathbf{Ip}: \neg R \Rightarrow P, \text{ occorrenza positiva}\} \\
 & P \wedge \neg Q \\
 \Rightarrow & \quad \{\mathbf{Ip}: P \Rightarrow \neg S \wedge \neg Q, \text{ occorrenza positiva}\} \\
 & \neg S \wedge \neg Q \wedge \neg Q \\
 \Rightarrow & \quad \{(Sempl-\wedge), \text{ occorrenza positiva}\} \\
 & \neg S
 \end{aligned}$$

2. La formula non è una tautologia, in quanto l'interpretazione: $\{P \mapsto \mathbf{T}, R \mapsto \mathbf{T}, S \mapsto \mathbf{F}, Q \mapsto \mathbf{T}\}$ la rende falsa. La seguente valutazione (riga della tabella di verità corrispondente all'interpretazione) giustifica la risposta (i numeri indicano l'ordine in cui sono state valutate le sottoformule):

P	R	S	Q		(P	∨	¬	R)	∧	(S	∨	¬	Q	⇒	¬	P)	⇒	(S	⇒	¬	R)	∧	(R	⇒	¬	Q)
T	T	F	T		T	T	F	T	T	F	F	F	T	T	F	T	F	F	T	F	T	F	T	F	F	T
					1	3	2	1	5	1	3	2	1	4	2	1	6	1	3	2	1	4	1	3	2	1

ESERCIZIO 2

Si formalizzi il seguente enunciato usando l'alfabeto con simboli di costante $\mathcal{C} = \{L, P\}$ e simboli di predicato $\mathcal{P} = \{citta(-), volo(-), partenza(-, -), arrivo(-, -)\}$ rispetto all'interpretazione fissata (\mathcal{D}, α) , dove \mathcal{D} è l'insieme di tutte le città e di tutti i voli, e

- $\alpha(L)$ è la città Londra,
- $\alpha(P)$ è la città Parigi,
- $\alpha(citta)(p)$ è vera se e solo se p è una città,
- $\alpha(volo)(p)$ è vera se e solo se p è un volo aereo,
- $\alpha(partenza)(p, q)$ è vera se e solo se il volo p parte dalla città q ,
- $\alpha(arrivo)(p, q)$ è vera se e solo se il volo p arriva nella città q .

“Ogni città ha almeno un volo aereo per Parigi o per Londra.”

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

$$(\forall x . citta(x) \Rightarrow (\exists y . volo(y) \wedge partenza(y, x) \wedge (arrivo(y, L) \vee arrivo(y, P))))$$

ESERCIZIO 3

Si provi che la seguente formula è valida (P, Q, R e S contengono la variabile libera x):

$$((\forall x . P \wedge \neg R) \vee \neg(\exists x . Q \wedge \neg S)) \wedge (\exists x . Q \vee R) \Rightarrow \neg(\forall x . \neg P \wedge \neg(S \vee R))$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Applichiamo (De Morgan) nella formula per portare le negazioni all'interno:

$$\begin{aligned} & ((\forall x . P \wedge \neg R) \vee \neg(\exists x . Q \wedge \neg S)) \wedge (\exists x . Q \vee R) \Rightarrow \neg(\forall x . \neg P \wedge \neg(S \vee R)) \\ \equiv & \{(\text{De Morgan}), (\text{Doppia Negazione}), \text{più volte}\} \\ & ((\forall x . P \wedge \neg R) \vee (\forall x . \neg Q \vee S)) \wedge (\exists x . Q \vee R) \Rightarrow (\exists x . P \vee S \vee R) \end{aligned}$$

Per il Principio di Skolemizzazione, è sufficiente dimostrare la seguente implicazione, dove \mathbf{d} è una nuova costante:

$$((\forall x . P \wedge \neg R) \vee (\forall x . \neg Q \vee S)) \wedge (\exists x . Q \vee R) \wedge (Q[\mathbf{d}/x] \vee R[\mathbf{d}/x]) \Rightarrow (\exists x . P \vee S \vee R)$$

Partiamo dalla premessa:

$$\begin{aligned} & ((\forall x . P \wedge \neg R) \vee (\forall x . \neg Q \vee S)) \wedge (\exists x . Q \vee R) \wedge (Q[\mathbf{d}/x] \vee R[\mathbf{d}/x]) \\ \Rightarrow & \{(\text{semp-}\wedge), \text{occorrenza positiva}\} \\ & ((\forall x . P \wedge \neg R) \vee (\forall x . \neg Q \vee S)) \wedge (Q[\mathbf{d}/x] \vee R[\mathbf{d}/x]) \\ \Rightarrow & \{(\forall : \vee), \text{occorrenza positiva}\} \\ & (\forall x . (P \wedge \neg R) \vee \neg Q \vee S) \wedge (Q[\mathbf{d}/x] \vee R[\mathbf{d}/x]) \\ \Rightarrow & \{(\text{elim-}\forall), \text{occorrenza positiva}\} \\ & ((P[\mathbf{d}/x] \wedge \neg R[\mathbf{d}/x]) \vee \neg Q[\mathbf{d}/x] \vee S[\mathbf{d}/x]) \wedge (Q[\mathbf{d}/x] \vee R[\mathbf{d}/x]) \\ \Rightarrow & \{(\text{Risoluzione})\} \\ & (P[\mathbf{d}/x] \wedge \neg R[\mathbf{d}/x]) \vee S[\mathbf{d}/x] \vee R[\mathbf{d}/x] \\ \Rightarrow & \{(\text{semp-}\wedge), \text{occorrenza positiva}\} \\ & P[\mathbf{d}/x] \vee S[\mathbf{d}/x] \vee R[\mathbf{d}/x] \\ \Rightarrow & \{(\text{intro-}\exists)\} \\ & (\exists x . P \vee S \vee R) \end{aligned}$$

ESERCIZIO 4

Si formalizzi il seguente enunciato (assumendo \mathbf{a}, \mathbf{b} : array $[0, \mathbf{n})$ of int):

“Il numero degli elementi pari dell'array \mathbf{b} è maggiore del numero degli elementi dispari dell'array \mathbf{a} solo se il minimo dell'array \mathbf{a} è pari.”

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

$$(\#\{i : i \in [0, y + 1] \mid \text{pari}(b[i])\}) > \#\{i : i \in [0, n] \mid \text{dispari}(a[i])\} \Rightarrow \text{pari}((\min i : i \in [0, n]) \cdot a[i])$$

ESERCIZIO 5

Si verifichi la seguente tripla di Hoare (assumendo **a, b: array [0, n] of int**):

$$\begin{aligned} & \{h \in (0, n) \wedge (\forall i. i \in [0, h] \Rightarrow a[i] = (\Sigma y : y \in [0, i]. b[y]))\} \\ & \quad \mathbf{a[h] := b[h] + a[h-1];} \\ & \quad \mathbf{h := h + 1} \\ & \{(\forall i. i \in [0, h] \Rightarrow a[i] = (\Sigma y : y \in [0, i]. b[y]))\} \end{aligned}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 5

Chiamiamo Q la postcondizione:

$$(\forall i. i \in [0, h] \Rightarrow a[i] = (\Sigma y : y \in [0, i]. b[y]))$$

Per dimostrare la tripla data applichiamo la regola di inferenza della Sequenza riducendoci a dimostrare che

$$(5.1) \{h \in (0, n) \wedge Q\} \mathbf{a[h] := b[h] + a[h-1]} \{R\}$$

$$(5.2) \{R\} \mathbf{h:=h+1} \{Q\}$$

Partiamo quindi dalla (5.2) per determinare R . Applicando l'assioma dell'assegamento (ASS) otteniamo:

$$\begin{aligned} & \text{def}(h + 1) \wedge (\forall i. i \in [0, h] \Rightarrow a[i] = (\Sigma y : y \in [0, i]. b[y]))^{[h+1/h]} \\ \equiv & \{\text{definizione di def e sostituzione}\} \\ & (\forall i. i \in [0, h + 1] \Rightarrow a[i] = (\Sigma y : y \in [0, i]. b[y])) \end{aligned}$$

Quindi R è la seguente asserzione:

$$(\forall i. i \in [0, h + 1] \Rightarrow a[i] = (\Sigma y : y \in [0, i]. b[y]))$$

Per dimostrare la (5.1) applichiamo l'Assioma dell'Aggiornamento Selettivo, e la regola (PRE). Di conseguenza ci riduciamo a verificare che:

$$h \in (0, n) \wedge Q \Rightarrow \text{def}(h) \wedge h \in \text{dom}(a) \wedge \text{def}(b[h] + a[h - 1]) \wedge R^{[a'/a]} \quad \text{dove} \quad a' = a^{[b[h]+a[h-1]/h]}$$

Partiamo dalla conseguenza

$$\begin{aligned} & \text{def}(h) \wedge h \in \text{dom}(a) \wedge \text{def}(b[h] + a[h - 1]) \wedge R^{[a'/a]} \\ \equiv & \{\text{definizione di def}\} \\ & h \in \text{dom}(a) \wedge h \in \text{dom}(b) \wedge h - 1 \in \text{dom}(a) \wedge R^{[a'/a]} \\ \equiv & \{\mathbf{Ip}: h \in (0, n) \wedge \text{dom}(b) = \text{dom}(a) = [0, n], \text{ sostituzione}\} \\ & (\forall i. i \in [0, h + 1] \Rightarrow a'[i] = (\Sigma y : y \in [0, i]. b[y])) \\ \equiv & \{(\text{Intervallo-}\forall), (0, h] \text{ non vuoto (infatti per ipotesi } h \in (0, n), \text{ quindi } h > 0) \} \\ & (\forall i. i \in [0, h] \Rightarrow a'[i] = (\Sigma y : y \in [0, i]. b[y])) \wedge a'[h] = (\Sigma y : y \in [0, h]. b[y]) \\ \equiv & \{\text{per def di } a': a'[i] = a[i] \text{ per ogni } i \in [0, h] \text{ e } a'[h] = b[h] + a[h - 1]\} \\ & (\forall i. i \in [0, h] \Rightarrow a[i] = (\Sigma y : y \in [0, i]. b[y])) \wedge b[h] + a[h - 1] = (\Sigma y : y \in [0, h]. b[y]) \\ \equiv & \{\mathbf{Ip}: (\forall i. i \in [0, h] \Rightarrow a[i] = (\Sigma y : y \in [0, i]. b[y]))\} \\ & b[h] + a[h - 1] = (\Sigma y : y \in [0, h]. b[y]) \\ \equiv & \{(\text{Intervallo-}\Sigma)\} \\ & b[h] + a[h - 1] = (\Sigma y : y \in [0, h - 1]. b[y]) + b[h] \\ \equiv & \{\mathbf{Ip}: (\forall i. i \in [0, h] \Rightarrow a[i] = (\Sigma y : y \in [0, i]. b[y])), h - 1 \in [0, h], \text{ calcolo}\} \\ & \mathbf{T} \end{aligned}$$

ESERCIZIO 6

Si consideri il seguente programma annotato (assumendo \mathbf{a}, \mathbf{c} : array $[0, m]$ of int):

```

{ m > 0 }
y := 0; h := 0;
{Inv : y ∈ [0, m] ∧ h = #{i : i ∈ [0, y] | a[i] = c[i]}}{t: m - y}
while (y < m) do
  if (a[y] = c[y])
    then h := h + 1
    else skip fi;
  y := y + 1
endw
{h = #{i : i ∈ [0, m] | a[i] = c[i]}}

```

Scrivere e dimostrare l'ipotesi di invarianza.

SOLUZIONE ESERCIZIO 6

Invariante $Inv : y \in [0, m] \wedge h = \#\{i : i \in [0, y] \mid a[i] = c[i]\}$
 Funzione di terminazione $t : m - y$
 Condizione $E : y < m$
 Comando $C : \text{if } (a[y] = c[y]) \text{ then } h := h + 1 \text{ else skip fi; } y := y + 1$

L' *Ipotesi di Invarianza* ($\{Inv \wedge E\} C \{Inv \wedge def(E)\}$) in questo caso è

```

{y ∈ [0, m] ∧ h = #{i : i ∈ [0, y] | a[i] = c[i]} ∧ (y < m)}
  if (a[y] = c[y]) then h := h + 1 else skip fi; y := y + 1
{y ∈ [0, m] ∧ h = #{i : i ∈ [0, y] | a[i] = c[i]} ∧ def(y < m)}

```

Applicando la Regola della Sequenza, dobbiamo trovare una asserzione R tale che le seguenti triple siano verificate:

(6.1) $\{y \in [0, m] \wedge h = \#\{i : i \in [0, y] \mid a[i] = c[i]\} \wedge (y < m)\} \text{if } (a[y] = c[y]) \text{ then } h := h + 1 \text{ else skip fi } \{R\}$

(6.2) $\{R\} y := y + 1 \{y \in [0, m] \wedge h = \#\{i : i \in [0, y] \mid a[i] = c[i]\} \wedge def(y < m)\}$

Per determinare R , usiamo l'Assioma dell'Assegnamento in (6.2) e troviamo

$$def(y + 1) \wedge (Inv \wedge def(y < m))^{[y+1/y]}$$

$$\equiv \{\text{sostituzione, definizione di } def, \text{ calcolo}\}$$

$$y + 1 \in [0, m] \wedge h = \#\{i : i \in [0, y + 1] \mid a[i] = c[i]\} \wedge def(y + 1 < m)$$

Quindi resta da verificare la tripla (6.1) per il valore di R appena calcolato. Applicando la regola del Condizionale, dobbiamo verificare che

(6.2.1) $y \in [0, m] \wedge h = \#\{i : i \in [0, y] \mid a[i] = c[i]\} \wedge (y < m) \Rightarrow def(a[y] = c[y])$

(6.2.2) $\{y \in [0, m] \wedge h = \#\{i : i \in [0, y] \mid a[i] = c[i]\} \wedge (y < m) \wedge a[y] = c[y]\} h := h + 1 \{R\}$

(6.2.3) $\{y \in [0, m] \wedge h = \#\{i : i \in [0, y] \mid a[i] = c[i]\} \wedge (y < m) \wedge \neg(a[y] = c[y])\} \text{skip } \{R\}$

Per dimostrare (6.2.1) partiamo dalla conseguenza

$$def(a[y] = c[y])$$

$$\equiv \{\text{definizione di } def\}$$

$$y \in dom(a) \wedge y \in dom(b)$$

$$\equiv \{\mathbf{Ip}: y \in [0, m] \wedge y < m \wedge dom(a) = dom(b) = [0, m]\}$$

T

Per dimostrare la (6.2.2) applichiamo la regola dell Assegnamento e ci riduciamo a verificare che

$$y \in [0, m] \wedge h = \#\{i : i \in [0, y) \mid a[i] = c[i]\} \wedge (y < m) \wedge a[y] = c[y] \Rightarrow \\ def(h+1) \wedge (y+1 \in [0, m] \wedge h = \#\{i : i \in [0, y+1) \mid a[i] = c[i]\} \wedge def(y+1 < m))^{[h+1/h]}$$

Partiamo dalla conseguenza

$$def(h+1) \wedge (y+1 \in [0, m] \wedge h = \#\{i : i \in [0, y+1) \mid a[i] = c[i]\} \wedge def(y+1 < m))^{[h+1/h]} \\ \equiv \{ \text{definizione di } def, \text{ sostituzione} \} \\ y+1 \in [0, m] \wedge h+1 = \#\{i : i \in [0, y+1) \mid a[i] = c[i]\} \\ \equiv \{ \mathbf{Ip}: y \in [0, m] \wedge y < m \} \\ h+1 = \#\{i : i \in [0, y+1) \mid a[i] = c[i]\} \\ \equiv \{ (\text{Intervallo-}\#), \mathbf{Ip}: a[y] = c[y] \} \\ h+1 = \#\{i : i \in [0, y) \mid a[i] = c[i]\} + 1 \\ \equiv \{ \mathbf{Ip}: h = \#\{i : i \in [0, y) \mid a[i] = c[i]\}, \text{ calcolo} \} \\ \mathbf{T}$$

Per dimostrare la (6.2.3), per la regola (SKIP) è sufficiente dimostrare:

$$y \in [0, m] \wedge h = \#\{i : i \in [0, y) \mid a[i] = c[i]\} \wedge (y < m) \wedge \neg(a[y] = c[y]) \Rightarrow R$$

Partiamo dalla conseguenza

$$y+1 \in [0, m] \wedge h = \#\{i : i \in [0, y+1) \mid a[i] = c[i]\} \wedge def(y+1 < m) \\ \equiv \{ \text{definizione di } def \} \\ y+1 \in [0, m] \wedge h = \#\{i : i \in [0, y+1) \mid a[i] = c[i]\} \\ \equiv \{ \mathbf{Ip}: y \in [0, m] \wedge y < m \} \\ h = \#\{i : i \in [0, y+1) \mid a[i] = c[i]\} \\ \equiv \{ (\text{Intervallo-}\#), \mathbf{Ip}: \neg(a[y] = c[y]) \} \\ h = \#\{i : i \in [0, y) \mid a[i] = c[i]\} \\ \equiv \{ \mathbf{Ip}: h = \#\{i : i \in [0, y) \mid a[i] = c[i]\} \} \\ \mathbf{T}$$