

LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2015-2016

Primo Appello - 19/01/2016 — Soluzioni Proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1

Si dica se le seguenti proposizioni sono tautologie oppure no. Se una proposizione è una tautologia, lo si deve dimostrare senza usare le tabelle di verità; altrimenti va prodotto un controesempio mostrando esplicitamente che rende la formula falsa.

1. $((\neg Q \vee \neg P \Rightarrow R) \Rightarrow \neg S) \Rightarrow (P \Rightarrow \neg S)$
2. $(P \Rightarrow Q \wedge \neg R) \wedge \neg(P \Rightarrow S) \Rightarrow \neg(Q \Rightarrow S \vee R)$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1. La formula non è una tautologia, in quanto l'interpretazione: $\{Q \mapsto \mathbf{F}, P \mapsto \mathbf{T}, R \mapsto \mathbf{F}, S \mapsto \mathbf{T}\}$ la rende falsa. La seguente valutazione (riga della tabella di verità corrispondente all'interpretazione) giustifica la risposta (i numeri indicano l'ordine in cui sono state valutate le sottoformule):

Q	P	R	S		$((\neg$	Q	\vee	\neg	P	\Rightarrow	$R)$	\Rightarrow	\neg	$S)$	\Rightarrow	$(P$	\Rightarrow	\neg	$S)$	
F	T	F	T		T	F	T	F	T	F	F	T	F	T	F	T	F	F	F	T
					2	1	3	2	1	4	1	5	2	1	6	1	3	2	1	

2. La formula è una tautologia come mostrato di seguito. Consideriamo la conseguenza e semplifichiamola:

$$\begin{aligned} & \neg(Q \Rightarrow S \vee R) \\ \equiv & \{(\neg \Rightarrow)\} \\ & Q \wedge \neg(S \vee R) \\ \equiv & \{(\text{De Morgan})\} \\ & Q \wedge \neg S \wedge \neg R \quad (\dagger) \end{aligned}$$

Mostriamo ora che la premessa implica la formula (\dagger) :

$$\begin{aligned} & (P \Rightarrow Q \wedge \neg R) \wedge \neg(P \Rightarrow S) \\ \equiv & \{(\neg \Rightarrow)\} \\ & (P \Rightarrow Q \wedge \neg R) \wedge P \wedge \neg S \\ \Rightarrow & \{(\text{Modus Ponens})\} \\ & Q \wedge \neg R \wedge \neg S \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2

Si formalizzi il seguente enunciato usando l'alfabeto con simboli di costante $\mathcal{C} = \{C\}$ e simboli di predicato $\mathcal{P} = \{\text{amico}(-, -), \text{abitano}(-, -)\}$ rispetto all'interpretazione fissata (\mathcal{D}, α) , dove \mathcal{D} è l'insieme di tutti gli esseri viventi, e

- $\alpha(C)$ è la persona Carlo,
- $\alpha(\text{amico})(p, q)$ è vera se e solo se p e q sono amici,
- $\alpha(\text{abitano})(p, q)$ è vera se e solo se p e q abitano nella stessa città.

“Tutte le persone che abitano nella stessa città di Carlo hanno almeno un amico in comune.”

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

$$(\exists x . (\forall y . (\text{abitano}(y, C) \Rightarrow \text{amico}(x, y))))$$

oppure

$$(\forall x . (\forall y . \text{abitano}(x, C) \wedge \text{abitano}(y, C) \Rightarrow (\exists z . \text{amico}(x, z) \wedge \text{amico}(y, z))))$$

ESERCIZIO 3

Si provi che la seguente formula è valida (P , Q , R e S contengono la variabile libera x):

$$(\forall x . P \wedge \neg Q) \wedge (\exists x . P \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg S \wedge R)) \Rightarrow \neg(\forall x . S \vee \neg R)$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Cominciamo col semplificare la conseguenza:

$$\begin{aligned} & \neg(\forall x . S \vee \neg R) \\ \equiv & \{(\text{De Morgan})\} \\ & (\exists x . \neg(S \vee \neg R)) \\ \equiv & \{(\text{De Morgan}), (\text{Doppia negazione})\} \\ & (\exists x . \neg S \wedge R) \quad (\dagger) \end{aligned}$$

Per il Principio di Skolemizzazione, per mostrare che la premessa implica la formula (\dagger) è sufficiente dimostrare la seguente implicazione, dove \mathbf{d} è una nuova costante:

$$(\forall x . P \wedge \neg Q) \wedge (\exists x . P \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg S \wedge R)) \wedge (P \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg S \wedge R))[\mathbf{d}/x] \Rightarrow (\exists x . \neg S \wedge R)$$

Partiamo dalla premessa:

$$\begin{aligned} & (\forall x . P \wedge \neg Q) \wedge (\exists x . P \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg S \wedge R)) \wedge (P \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg S \wedge R))[\mathbf{d}/x] \\ \Rightarrow & \{(\text{semp-}\wedge)\} \\ & (\forall x . P \wedge \neg Q) \wedge (P \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg S \wedge R))[\mathbf{d}/x] \\ \Rightarrow & \{(\text{elim-}\forall)\} \\ & (P \wedge \neg Q)[\mathbf{d}/x] \wedge (P \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg S \wedge R))[\mathbf{d}/x] \\ \equiv & \{\text{Sostituzione}\} \\ & P[\mathbf{d}/x] \wedge \neg Q[\mathbf{d}/x] \wedge (P[\mathbf{d}/x] \Rightarrow (\neg Q[\mathbf{d}/x] \Rightarrow \neg S[\mathbf{d}/x] \wedge R[\mathbf{d}/x])) \\ \Rightarrow & \{(\text{Modus Ponens})\} \\ & \neg Q[\mathbf{d}/x] \wedge (\neg Q[\mathbf{d}/x] \Rightarrow \neg S[\mathbf{d}/x] \wedge R[\mathbf{d}/x]) \\ \Rightarrow & \{(\text{Modus Ponens})\} \\ & \neg S[\mathbf{d}/x] \wedge R[\mathbf{d}/x] \\ \Rightarrow & \{(\text{intro-}\Rightarrow)\} \\ & (\exists x . \neg S \wedge R) \end{aligned}$$

ESERCIZIO 4

Si formalizzi il seguente enunciato (assumendo \mathbf{a} , \mathbf{b} : array $[0, n]$ of int):

“Ogni elemento dell’array \mathbf{b} è maggiore della somma dei quadrati degli elementi di \mathbf{a} con indice minore o uguale al suo.”

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

$$(\forall x . x \in [0, n] \Rightarrow b[x] > (\Sigma y . y \in [0, x] . a[y]^2))$$

ESERCIZIO 5

Si verifichi la seguente tripla di Hoare (assumendo **b**: array [0, n] of int):

```

{ $x \in (0, n) \wedge (\forall i. i \in (0, x) \Rightarrow b[i] > b[i - 1])$ }
  if (  $b[x] > b[x-1]$  )
    then skip
    else  $b[x] := b[x-1]+1$ 
  fi
{ $(\forall i. i \in (0, x) \Rightarrow b[i] > b[i - 1])$ }

```

SOLUZIONE ESERCIZIO 5

Chiamiamo Q la postcondizione: $Q = (\forall i. i \in (0, x) \Rightarrow b[i] > b[i - 1])$

Per dimostrare la tripla data applichiamo la regola del Condizionale riducendoci a dimostrare che

$$(5.1) \quad x \in (0, n) \wedge (\forall i. i \in (0, x) \Rightarrow b[i] > b[i - 1]) \Rightarrow \text{def}(b[x] > b[x - 1])$$

$$(5.2) \quad \{x \in (0, n) \wedge (\forall i. i \in (0, x) \Rightarrow b[i] > b[i - 1]) \wedge b[x] > b[x - 1]\} \text{ skip } \{Q\}$$

$$(5.3) \quad \{x \in (0, n) \wedge (\forall i. i \in (0, x) \Rightarrow b[i] > b[i - 1]) \wedge \neg(b[x] > b[x - 1])\} b[x] := b[x-1]+1 \{Q\}$$

Per dimostrare (5.1) partiamo dalla conseguenza

$$\begin{aligned}
& \text{def}(b[x] > b[x - 1]) \\
\equiv & \{\text{definizione di def}\} \\
& x \in \text{dom}(b) \wedge x - 1 \in \text{dom}(b) \\
\equiv & \{\mathbf{Ip}: x \in (0, n) \wedge \text{dom}(b) = [0, n]\} \\
& \mathbf{T}
\end{aligned}$$

Per dimostrare (5.2), per la regola (SKIP) è sufficiente dimostrare:

$$x \in (0, n) \wedge (\forall i. i \in (0, x) \Rightarrow b[i] > b[i - 1]) \wedge b[x] > b[x - 1] \Rightarrow Q$$

Poiché $Q = (\forall i. i \in (0, x) \Rightarrow b[i] > b[i - 1])$, l'implicazione è vera per la legge (Intervallo- \forall) e $b[x] > b[x - 1]$.

Per la (5.3) applichiamo l'Assioma dell'Aggiornamento Selettivo, e la regola PRE. Quindi ci riduciamo a verificare che

$$(x \in (0, n) \wedge (\forall i. i \in (0, x) \Rightarrow b[i] > b[i - 1]) \wedge \neg(b[x] > b[x - 1])) \Rightarrow \text{def}(x) \wedge \text{def}(b[x - 1] + 1) \wedge x \in \text{dom}(b) \wedge Q^{b'/b}$$

dove $b' = b^{[b[x-1]+1/x]}$.

Partiamo dalla conseguenza

$$\begin{aligned}
& \text{def}(x) \wedge \text{def}(b[x - 1] + 1) \wedge x \in \text{dom}(b) \wedge Q^{b'/b} \\
\equiv & \{\text{definizione di def e di } Q\} \\
& x - 1 \in \text{dom}(b) \wedge x \in \text{dom}(b) \wedge (\forall i. i \in (0, x) \Rightarrow b[i] > b[i - 1])[b'/b] \\
\equiv & \{\mathbf{Ip}: x \in (0, n) \wedge \text{dom}(b) = [0, n], \text{ sostituzione}\} \\
& (\forall i. i \in (0, x) \Rightarrow b'[i] > b'[i - 1]) \\
\equiv & \{(\text{Intervallo-}\forall), (0, x) \text{ non vuoto (infatti per ipotesi } x \in (0, n), \text{ quindi } x > 0)\} \\
& (\forall i. i \in (0, x) \Rightarrow b'[i] > b'[i - 1]) \wedge b'[x] > b'[x - 1] \\
\equiv & \{\text{def di } b', \text{ quindi } b'[k] = b[k] \text{ per ogni } k \in [0, x), \text{ e } b'[x] = b[x - 1] + 1\} \\
& (\forall i. i \in (0, x) \Rightarrow b[i] > b[i - 1]) \wedge b[x - 1] + 1 > b[x - 1] \\
\equiv & \{\mathbf{Ip}: (\forall i. i \in (0, x) \Rightarrow b[i] > b[i - 1]), \text{ calcolo}\} \\
& \mathbf{T}
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 6

Si consideri il seguente programma annotato (assumendo **a**: **array** [0, n] of int):

```

{ n > 0 }
x := 0; c := 0
{Inv : x ∈ [0, n] ∧ c = (x * (x - 1)/2) - (Σy : y ∈ [0, x]. a[y])}{t: n - x}
while (x < n) do
    c := c - a[x] + x;
    x := x + 1
endw
{c = (n * (n - 1)/2) - (Σy : y ∈ [0, n]. a[y])}

```

Scrivere e dimostrare l'ipotesi di invarianza.

SOLUZIONE ESERCIZIO 6

Invariante *Inv* : $x \in [0, n] \wedge c = (x * (x - 1)/2) - (\Sigma y : y \in [0, x]. a[y])$

Funzione di terminazione *t* : $n - x$

Condizione *E* : $x < n$

Comando *C* : $c := c - a[x] + x; x := x + 1$

L' *Ipotesi di Invarianza* ($\{Inv \wedge E\} C \{Inv \wedge def(E)\}$) in questo caso è

$$\{x \in [0, n] \wedge c = (x * (x - 1)/2) - (\Sigma y : y \in [0, x]. a[y]) \wedge (x < n)\}$$

$$c := c - a[x] + x; x := x + 1$$

$$\{x \in [0, n] \wedge c = (x * (x - 1)/2) - (\Sigma y : y \in [0, x]. a[y]) \wedge def(x < n)\}$$

Applicando la Regola della Sequenza, dobbiamo trovare una asserzione *R* tale che le seguenti triple siano verificate:

$$(6.1) \{x \in [0, n] \wedge c = (x * (x - 1)/2) - (\Sigma y : y \in [0, x]. a[y]) \wedge (x < n)\} \quad c := c - a[x] + x \quad \{R\}$$

$$(6.2) \{R\} \quad x := x + 1 \quad \{x \in [0, n] \wedge c = (x * (x - 1)/2) - (\Sigma y : y \in [0, x]. a[y]) \wedge def(x < n)\}$$

Per determinare *R*, usiamo l'Assioma dell'Assegnamento in (6.2) e troviamo

$$def(x + 1) \wedge (x \in [0, n] \wedge c = (x * (x - 1)/2) - (\Sigma y : y \in [0, x]. a[y]) \wedge def(x < n))^{[x+1/x]}$$

$$\equiv \{\text{sostituzione, definizione di } def, \text{ calcolo}\}$$

$$x + 1 \in [0, n] \wedge c = ((x + 1) * x/2) - (\Sigma y : y \in [0, x]. a[y]) \wedge def(x + 1 < n)$$

Quindi resta da verificare la tripla (6.1) per il valore di *R* appena calcolato. Applicando la Regola dell'Assegnamento, dobbiamo verificare che

$$x \in [0, n] \wedge c = (x * (x - 1)/2) - (\Sigma y : y \in [0, x]. a[y]) \wedge (x < n) \Rightarrow def(c - a[x] + x) \wedge R^{[c-a[x]+x/c]}$$

Partiamo dalla conseguenza, applicando la sostituzione

$$def(c - a[x] + x) \wedge R^{[c-a[x]+x/c]}$$

$$\equiv \{\text{definizione di } def, \text{ definizione di } R, \text{ sostituzione}\}$$

$$x \in dom(a) \wedge (x + 1 \in [0, n] \wedge c = ((x + 1) * x/2) - (\Sigma y : y \in [0, x]. a[y]) \wedge def(x + 1 < n))^{[c-a[x]+x/c]}$$

$$\equiv \{\mathbf{Ip} : x \in [0, n], dom(a) = [0, n], \text{ sostituzione, def di } def\}$$

$$x + 1 \in [0, n] \wedge c - a[x] + x = ((x + 1) * x/2) - (\Sigma y : y \in [0, x]. a[y])$$

$$\equiv \{\mathbf{Ip} : x \in [0, n], x < n, \text{ calcolo}\}$$

$$c - a[x] = (x^2 + x - 2x)/2 - (\Sigma y : y \in [0, x]. a[y])$$

$$\equiv \{(\text{Intervallo-}\Sigma), \text{ calcolo}\}$$

$$c - a[x] = x * (x - 1)/2 - (\Sigma y : y \in [0, x]. a[y]) - a[x]$$

$$\equiv \{\mathbf{Ip} : c = (x * (x - 1)/2) - (\Sigma y : y \in [0, x]. a[y]), \text{ calcolo}\}$$

T