LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2015-2016
Prima prova di verifica intermedia - 5/11/2015 - Soluzioni proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1

Per ognuna delle seguenti formule si dica se si tratta di una tautologia oppure no. Se è una tautologia si fornisca una dimostrazione (non per casi) altrimenti si fornisca un controesempio.

1. $(\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg(P \Rightarrow \neg Q) \vee (Q \vee \neg R)) \;\Rightarrow\; (R \Rightarrow P)$
2. $P \wedge R \Rightarrow (Q \Rightarrow \neg S \wedge R) \;\equiv\; R \wedge S \Rightarrow (P \Rightarrow \neg Q)$
3. $\neg((\neg Q \vee P) \wedge R) \wedge (P \vee Q \Rightarrow R) \;\Rightarrow\; (Q \Rightarrow \neg P)$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1. Non è una tautologia. Per mostralo basta trovare una interpretazione che rende falsa la formula (un *controesempio*. Per esempio $P = \mathbf{F}$, $Q = \mathbf{T}$, $R = \mathbf{T}$.

2. La formula è una tautologia. Semplifichiamo prima il membro destro e poi quello sinistro dell'equivalenza:

$$\begin{array}{ll}
 & P \wedge R \Rightarrow (Q \Rightarrow \neg S \wedge R) \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow), \text{ due volte}\} \\
 & \neg(P \wedge R) \vee (\neg Q \vee (\neg S \wedge R)) \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\} \\
 & (\neg P \vee \neg R) \vee (\neg Q \vee (\neg S \wedge R)) \\
\equiv & \quad \{(\text{assoc.}), (\text{comm.})\} \\
 & \neg P \vee \neg R \vee (R \wedge \neg S) \vee \neg Q \\
\equiv & \quad \{(\text{complemento})\} \\
 & \neg P \vee \neg R \vee \neg S \vee \neg Q \qquad \equiv \mathbf{(A)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & R \wedge S \Rightarrow (P \Rightarrow \neg Q) \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow), \text{ due volte }\} \\
 & \neg(R \wedge S) \vee (\neg P \vee \neg Q) \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\} \\
 & (\neg R \vee \neg S) \vee (\neg P \vee \neg Q) \qquad \equiv \mathbf{(B)}
\end{array}$$

Concludiamo osservando che le formule (A) e (B) sono ovviamente equivalenti per associatività e commutatività della disgiunzione.

3. Anche questa formula è una tautologia. Si possono sviluppare varie dimostrazioni. Ne mostriamo alcune.

   - Dimostriamo la formula partendo dalla premessa dell'implicazione:

$$\begin{array}{ll}
 & \neg((\neg Q \vee P) \wedge R) \wedge (P \vee Q \Rightarrow R) \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\} \\
 & (\neg(\neg Q \vee P) \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \Rightarrow R) \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow), \text{ al contrario}\} \\
 & (R \Rightarrow \neg(\neg Q \vee P)) \wedge (P \vee Q \Rightarrow R) \\
\Rightarrow & \quad \{(\text{transit.-}\Rightarrow), \text{ occorrenza positiva}\} \\
 & P \vee Q \Rightarrow \neg(\neg Q \vee P)
\end{array}$$

$\equiv \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow)\}$

$\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)$

$\equiv \quad \{(\text{De Morgan}), \text{ due volte}\}$

$(\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$

$\Rightarrow \quad \{(\text{sempl.-}\wedge), \text{ due volte, occorrenze positive}\}$

$\neg Q \vee \neg P$

$\equiv \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow), \text{ al contrario}\}$

$Q \ \Rightarrow \ \neg P$

- Alternativamente possiamo sviluppare una dimostrazione usando le ipotesi non tautologiche. Cominciamo col semplificare la premessa:

  $\neg((\neg Q \vee P) \wedge R) \wedge (P \vee Q \Rightarrow R)$

  $\equiv \quad \{(\text{De Morgan})\}$

  $(\neg(\neg Q \vee P) \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \Rightarrow R)$

  $\equiv \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow), \text{ al contrario}\}$

  $(R \Rightarrow \neg(\neg Q \vee P)) \wedge (P \vee Q \Rightarrow R)$

  $\equiv \quad \{(\text{De Morgan}), (\text{Doppia Negazione})\}$

  $(R \Rightarrow (Q \wedge \neg P)) \wedge (P \vee Q \Rightarrow R)$

  Ora dimostriamo la formula risultante dimostrando che $(Q \Rightarrow \neg P)$ è vera sfruttando le premesse $R \Rightarrow (Q \wedge \neg P)$ e $(P \vee Q \Rightarrow R)$ come *ipotesi non tautologiche*:

  Q

  $\Rightarrow \quad \{(\text{intro-}\vee)\}$

  $P \vee Q$

  $\Rightarrow \quad \{\textbf{Ip: } P \vee Q \Rightarrow R, \text{ occorrenza positiva}\}$

  R

  $\Rightarrow \quad \{\textbf{Ip: } R \Rightarrow (Q \wedge \neg P), \text{ occorrenza positiva}\}$

  $Q \wedge \neg P$

  $\Rightarrow \quad \{(\text{sempl. - }\wedge)\}$

  $\neg P$

ESERCIZIO 2
Utilizzando il principio di sostituzione dell'implicazione, si applichi l'ipotesi non tautologica $\neg P \vee \neg R \Rightarrow \neg Q$ alle seguenti formule, completando in entrambi i casi un singolo passo di dimostrazione con la relativa giustificazione.

1. $\neg(\neg P \vee \neg R) \wedge S \Rightarrow S \wedge \neg R$
2. $(P \;\Rightarrow\; \neg R) \wedge \neg S \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg R)$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

1. $\neg\underline{(\neg P \vee \neg R)} \wedge S \Rightarrow S \wedge \neg R$

$\Rightarrow$ $\{$**Ip:** $\neg P \vee \neg R \Rightarrow \neg Q$, $\underline{\neg P \vee \neg R}$ occorre pos.$\}$

$\neg\underline{\neg Q} \wedge S \Rightarrow S \wedge \neg R$

$Q \wedge S \Rightarrow S \wedge \neg R$

2. $(P \;\Rightarrow\; \neg R) \wedge \neg S \Rightarrow \neg\underline{(\neg P \vee \neg R)}$

$\Leftarrow$ $\{$**Ip:** $\neg P \vee \neg R \Rightarrow \neg Q$, $\underline{\neg P \vee \neg R}$ occorre neg.$\}$

$(P \;\Rightarrow\; \neg R) \wedge \neg S \Rightarrow \neg\underline{\neg Q}$

ESERCIZIO 3
Si formalizzi il seguente enunciato utilizzando l'alfabeto del primo ordine e l'interpretazione sul dominio dei naturali che sono proposti, senza introdurre ulteriori simboli:

"La somma di due numeri è pari solo se sono entrambi pari o entrambi dispari"

- **Alfabeto**: $\mathrm{C} = \emptyset$, $\mathcal{F} = \{+(\_,\_)\}$, $\mathcal{P} = \{pari(\_)\}$,
- **Interpretazione**: $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$, con
  - $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, con $\mathbb{N}$ insieme dei numeri naturali.
  - $\alpha(+)(n, m) = k$ se e solo se k è la somma di n e m.
  - $\alpha(pari)(n) = \mathbf{T}$ se e solo se n è pari.

SOLUZIONE ESERCIZIO 3
Ricordando che dire che P *solo se* Q, è un altro modo di dire che P implica Q, l'enunciato può essere formalizzato nel seguente modo:

$$(\forall x \,.\, (\forall y \,.\, pari(+(x, y)) \Rightarrow (pari(x) \wedge pari(y)) \vee (\neg pari(y) \wedge \neg pari(x))))$$

Oppure, in modo più conciso ed elegante:

$$(\forall x \,.\, (\forall y \,.\, pari(+(x, y)) \Rightarrow (pari(x) \equiv pari(y))))$$

ESERCIZIO 4
Si calcoli, motivando la risposta, il valore di verità della formula

$$\Phi = (\forall x\,.\,(\exists y\,.\,Q(x,y) \ \Rightarrow\ \neg P(x)))$$

nell'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D} = \{1,2,3\}$ ed α è definita come segue

$$\alpha(P)(z) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } z \in \{1,2\} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad \alpha(Q)(z,v) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } (z,v) \in \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,1)\} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si calcoli cioè $\mathcal{I}_\rho(\Phi)$ usando le regole della semantica del primo ordine, dove ρ è un assegnamento arbitrario.

SOLUZIONE ESERCIZIO 4
Mostriamo che la formula $\Phi = (\forall x\,.\,(\exists y\,.\,Q(x,y) \ \Rightarrow\ \neg P(x)))$ è *vera* nell'interpretazione data.

La formula Φ è una **quantificazione universale**, quindi per la regola (S8) è vera se e solo se assegnando a x un qualunque valore d del dominio $\mathcal{D}$ la formula nella portata è vera. Formalmente abbiamo che $\mathcal{I}_\rho(\Phi)$ è vera se, per ogni valore d del dominio, $\mathcal{I}_{\rho[d/x]}(\Phi_1)$ è vera, con $\Phi_1 = (\exists y\,.\,Q(x,y) \ \Rightarrow\ \neg P(x))$.

Procediamo per casi esaminando i tre possibili valori del dominio.

$d = 1$. Per la regola (S9), visto che Ψ è una **quantificazione esistenziale** abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(\Phi_1)$ è vera se esiste un valore d' del dominio che assegnato a y rende vera la formula $\Phi_2 = Q(x,y) \ \Rightarrow\ \neg P(x)$. Ovvero tale che $\mathcal{I}_{\rho[1/x][d'/y]}(\Phi_2)$ è vera.

Per la regola (S6), visto che Φ_2 è un'**implicazione**, abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[1/x][d'/y]}(\Phi_2)$ è falsa se e solo se la premessa $\mathcal{I}_{\rho[1/x][d'/y]}(Q(x,y))$ è vera e la conseguenza $\mathcal{I}_{\rho[1/x][d'/y]}(\neg P(x))$ è falsa. Notiamo che prendendo $d' = 3$ la premessa risulta falsa. Infatti per la regola (S1) abbiamo che

$$\mathcal{I}_{\rho[1/x][3/y]}(Q(x,y)) = \alpha(Q)(\alpha_{\rho[1/x][3/y]}(x), \alpha_{\rho[1/x][3/y]}(y)) = \alpha(Q)(1,3) = \mathbf{F}$$

$d = 2$. Ripetendo un ragionamento analogo a quello del punto precedente abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[2/x]}(\Phi_1)$ è vera se esiste un valore d' del dominio tale che $\mathcal{I}_{\rho[2/x][d'/y]}(\Phi_2)$ sia vera. In questo caso considerando $d' = 2$ abbiamo $\mathcal{I}_{\rho[2/x][2/y]}(Q(x,y)) = \alpha(Q)(2,2) = \mathbf{F}$. Quindi come nel caso precedente Φ_2 è vera dato che la premessa è falsa nel caso di $d' = 2$.

$d = 3$ Ripetendo un ragionamento analogo a quello dei punti precedenti abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(\Phi_1)$ è vera se esiste un valore d' del dominio tale che $\mathcal{I}_{\rho[3/x][d'/y]}(\Phi_2)$ sia vera. In questo caso possiamo prendere qualsiasi valore del dominio per d' ed in ogni caso la conclusione di Φ_2 è vera. Applicando la regola (S3) abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[3/x][d'/y]}(\neg P(x)) = \mathbf{T}$ segue da $\mathcal{I}_{\rho[3/x][d'/y]}(P(x)) = \mathbf{F}$ che si calcola come segue

$$\mathcal{I}_{\rho[3/x][d'/y]}(P(x)) = \alpha(P)(\alpha_{\rho[3/x][d'/y]}(x)) = \alpha(P)(3) = \mathbf{F}$$