



DIMOSTRAZIONE DI IMPLICAZIONI TAUTOLOGICHE

Corso di Logica per la Programmazione

VERSO ALTRE TECNICHE DI DIMOSTRAZIONE DI TAUTOLOGIE

- Abbiamo visto dimostrazioni di equivalenze (del tipo $\mathbf{p} \equiv \mathbf{q}$) usando una catena di equivalenze:

$$\mathbf{p} \equiv \dots \equiv \mathbf{q}$$

- Se la tautologia \mathbf{p} da dimostrare non è un'equivalenza, si può mostrare equivalente a \mathbf{T} : $\mathbf{p} \equiv \dots \equiv \mathbf{T}$

- Se la formula è del tipo $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$, si può dimostrare anche usando una catena di equivalenze/implicazioni:

$$\mathbf{p} \equiv \dots \Rightarrow \dots \equiv \dots \Rightarrow \mathbf{q}$$

usando equivalenze o implicazioni tautologiche come giustificazioni. Vediamo come...



ALCUNE IMPORTANTI LEGGI DERIVATE

- Hanno un'implicazione come connettivo principale
- Usate come giustificazioni in prove di implicazioni
- *Diamo anche forma disambiguata con parentesi*

- $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ (Modus Ponens)

$$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$$

- $p \wedge q \Rightarrow p$ (Sempl.- \wedge)

$$(p \wedge q) \Rightarrow p$$

- $p \Rightarrow p \vee q$ (Intro.- \vee)

$$p \Rightarrow (p \vee q)$$



CORRETTEZZA DI MODUS PONENS E SEMPL- \wedge

$$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q \quad \text{(Modus Ponens)}$$
$$\equiv \quad \{ \text{Elim-}\Rightarrow \}$$

$$p \wedge (\sim p \vee q) \Rightarrow q$$
$$\equiv \quad \{ \text{Complemento} \}$$

$$p \wedge q \Rightarrow q \quad \text{(Sempl.-}\wedge)$$
$$\equiv \quad \{ \text{Elim-}\Rightarrow \}$$

$$\sim(p \wedge q) \vee q$$
$$\equiv \quad \{ \text{DeMorgan} \}$$

$$\sim p \vee \sim q \vee q$$
$$\equiv \quad \{ \text{TerzoEscluso, Zero} \}$$

T



VERSO LA DIMOSTRAZIONE DI IMPLICAZIONI TAUTOLOGICHE

- Posso impostare la dimostrazione che $P_1 \Rightarrow P_k$ così:

P_1	
\equiv	{giustificazione ₁ }
	...
\equiv	{giustificazione _h }
P	
\Rightarrow	{ $P \Rightarrow Q$ }
Q	
\equiv	{giustificazione _{h+1} }
	...
\equiv	{giustificazione _{k-1} }
P_k	



ESEMPIO - TOLLENDO PONENS

- Usando la legge possiamo dimostrare

$$p \wedge q \Rightarrow q \text{ (Sempl-}\wedge\text{)}$$

$$(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q \text{ (Tollendo Ponens)}$$

$$(p \vee q) \wedge \sim p$$

$$\equiv \{ \text{Doppia Negazione e Complemento} \}$$

$$q \wedge \sim p$$

$$\Rightarrow \{ \text{Sempl.-}\wedge \}$$

$$q$$

- Si noti che abbiamo applicato (Sempl- \wedge) all'intera proposizione $q \wedge \sim p$

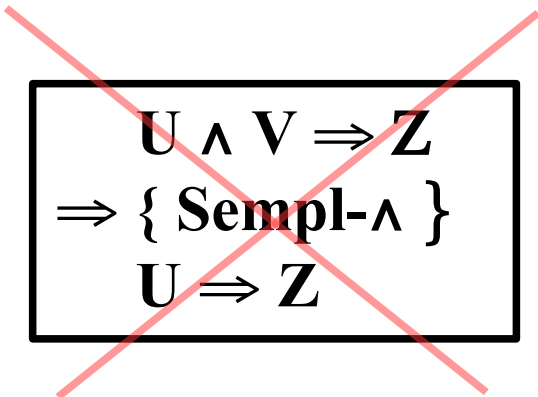


VALE UN PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE PER L'IMPLICAZIONE ?

- Il principio di sostituzione stabilisce che
“Se $P \equiv Q$, allora $R \equiv R[Q/P]$ ”
- E' valido un analogo principio di sostituzione per l'implicazione?
“Se $P \Rightarrow Q$, allora $R \Rightarrow R[Q/P]$ ” (???)
- In generale **NO**. Infatti:

$$\begin{array}{l} Z \Rightarrow U \wedge V \\ \Rightarrow \{ \text{Sempl-}\wedge \} \\ Z \Rightarrow U \end{array}$$

OK


$$\begin{array}{l} U \wedge V \Rightarrow Z \\ \Rightarrow \{ \text{Sempl-}\wedge \} \\ U \Rightarrow Z \end{array}$$

NO



ANALOGIA CON DISUGUAGLIANZE ALGEBRICHE

- Una situazione del tutto analoga si incontra nella dimostrazione di disuguaglianze algebriche
- Quali delle seguenti deduzioni sono corrette?

$$\begin{array}{l} \mathbf{a - c} \\ \leq \quad \{ \mathbf{a \leq b} \} \\ \mathbf{b - c} \end{array}$$

OK

$$\begin{array}{l} \mathbf{a - c} \\ \leq \quad \{ \mathbf{c \leq d} \} \\ \mathbf{a - d} \end{array}$$

NO

$$\begin{array}{l} \mathbf{a - c} \\ \geq \quad \{ \mathbf{c \leq d} \} \\ \mathbf{a - d} \end{array}$$

OK

- Si noti che **a** compare *positivamente* in **(a - c)**, ma **c** vi compare *negativamente*. Per questo nel secondo caso il segno di disuguaglianza va invertito.



OCCORRENZE POSITIVE E NEGATIVE

- Definizione: la proposizione **p** *occorre positivamente* in

$$\mathbf{p} \quad \mathbf{p} \vee \mathbf{q} \quad \mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \quad \mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{p}$$

- mentre **p** *occorre negativamente* in

$$\sim \mathbf{p} \\ \mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q} \quad (\text{si ricordi che } \mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q} \equiv \sim \mathbf{p} \vee \mathbf{q})$$

- Se **p** compare in **Q** a livello più profondo, si contano le **occorrenze negative** da **p** fino alla radice di **Q**:
 - se sono pari, **p** *occorre positivamente* in **Q**
 - se sono dispari **p** *occorre negativamente* in **Q**
- Attenzione: **p** può occorrere sia negativamente che positivamente in **Q**



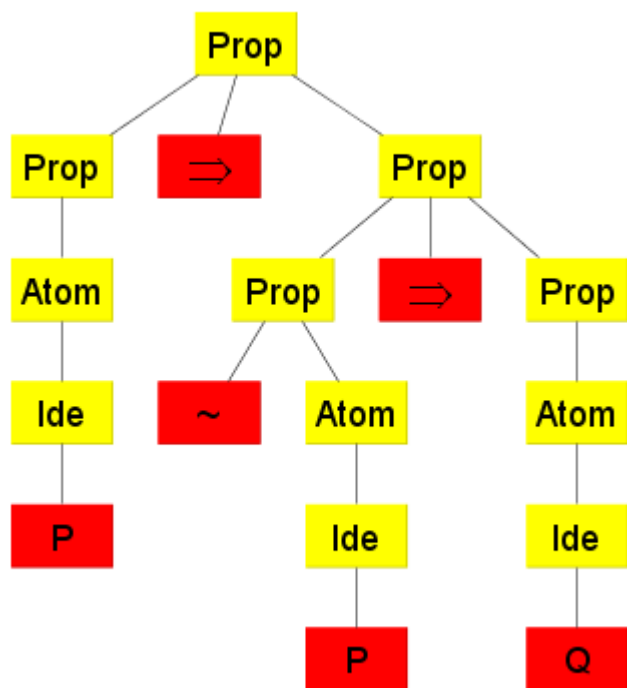
OCCORRENZE POSITIVE E NEGATIVE: ESEMPI CON ALBERI DI DERIVAZIONE

- Consideriamo gli alberi di derivazione per

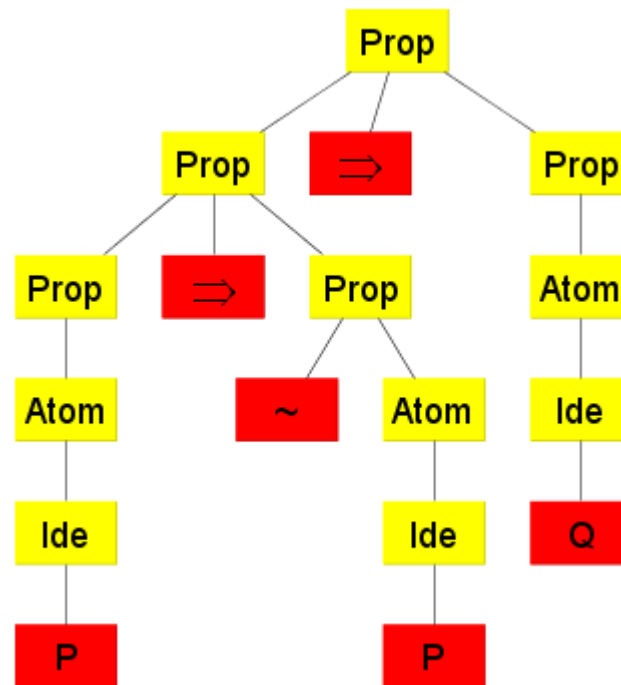
$$P \Rightarrow (\sim P \Rightarrow Q)$$

e

$$(P \Rightarrow \sim P) \Rightarrow Q$$



$$P \Rightarrow (\sim P \Rightarrow Q)$$



$$(P \Rightarrow \sim P) \Rightarrow Q$$

- Esercizio: come compagno P e Q ?



OCCORRENZE POSITIVE E NEGATIVE: ESEMPI

- Come occorre **p** nelle seguenti proposizioni?
 - $(q \wedge p \wedge r) \vee s$
 - $q \Rightarrow \sim(p \wedge r)$
 - $(\sim p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow s$
 - $\sim p \wedge q \Rightarrow (r \Rightarrow s)$
 - $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$
- Se ci sono più occorrenze di **p**, indicheremo esplicitamente quale ci interessa.
 - $\mathbf{p} \Rightarrow (q \vee p \Rightarrow q \vee \sim s)$
 - $p \Rightarrow (q \vee \mathbf{p} \Rightarrow q \vee \sim s)$



PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE PER L'IMPLICAZIONE

- Se abbiamo stabilito che
 - $P \Rightarrow Q$
 - P occorre *positivamente* in Rallora vale

$$R \Rightarrow R [Q/P]$$

- Se abbiamo stabilito che
 - $P \Rightarrow Q$
 - P occorre *negativamente* in Rallora vale

$$R \Leftarrow R [Q/P]$$



DIMOSTRAZIONE DI IMPLICAZIONI: ESEMPI

○ $(p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

$$p \Rightarrow q \wedge r$$

$$\Rightarrow \{ (\text{Sempl.-}\wedge), q \wedge r \text{ occorre positivamente} \}$$

$$p \Rightarrow q$$

$$p \wedge q \Rightarrow q \quad (\text{Sempl.-}\wedge)$$

○ $(p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Partiamo dalla conseguenza:

$$(p \Rightarrow r)$$

$$\Leftarrow \{ (\text{Intro.-}\vee), p \text{ occorre negativamente} \}$$

$$(p \vee q \Rightarrow r)$$

$$p \Rightarrow p \vee q \quad (\text{Intro.-}\vee)$$



FORME NORMALI

- Usando le leggi ogni proposizione può essere trasformata in una *forma normale*. Si considerano due tipi:

- Forma normale **coniuntiva**

$$(p_1 \vee p_2 \vee \dots) \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \dots) \wedge \dots$$

- Forma normale **disgiuntiva**

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots) \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge \dots) \vee \dots$$

dove $p_1 p_2 \dots q_1 q_2 \dots$ sono variabili proposizionali, *eventualmente negate*

- Utili per dimostrare equivalenza di formule, riducendole in forma normale e verificando se sono equivalenti
- Spesso ridurre a forma normale aumenta la dimensione della formula, perché bisogna usare distributività



IL PRINCIPIO DI RISOLUZIONE

- $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)$ (Risoluzione)
- Questa legge permette di semplificare una formula in *forma normale congiuntiva*. E' il meccanismo di calcolo alla base della *programmazione logica*.

$$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)$$

$$\equiv \quad \{(\text{Elim-} \Rightarrow), 2 \text{ volte}\}$$

$$(\sim q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)$$

$$\Rightarrow \quad \{(\text{Transitività-} \Rightarrow)\}$$

$$\sim q \Rightarrow r$$

$$\equiv \quad \{(\text{Elim-} \Rightarrow)\}$$

$$q \vee r$$

- Quindi la risoluzione corrisponde alla transitività dell'implicazione.
- Esercizio: dimostrare la legge senza usare la legge (Elim- \Rightarrow)

