

# LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2014-2015

## Primo Appello - 16/1/2015 — Soluzioni Proposte

**Attenzione:** Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

### ESERCIZIO 1

Dire se le seguenti proposizioni sono tautologie oppure no. Se una proposizione è una tautologia, lo si deve dimostrare senza usare le tabelle di verità; altrimenti va mostrato un controesempio con relativa giustificazione.

1.  $\neg((P \Rightarrow Q \wedge R) \Rightarrow (Q \vee S) \wedge Z) \Rightarrow (Z \Rightarrow \neg P)$
2.  $\neg(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow R \wedge Q)$

### SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1. La formula è una tautologia come mostrato dalla seguente dimostrazione. Partiamo dalla premessa:

$$\begin{aligned}
 & \neg((P \Rightarrow Q \wedge R) \Rightarrow (Q \vee S) \wedge Z) \\
 \equiv & \quad \{(\neg \Rightarrow)\} \\
 & (P \Rightarrow Q \wedge R) \wedge \neg((Q \vee S) \wedge Z) \\
 \equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\} \\
 & (P \Rightarrow Q \wedge R) \wedge (\neg(Q \vee S) \vee \neg Z) \\
 \equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\} \\
 & (P \Rightarrow Q \wedge R) \wedge ((\neg Q \wedge \neg S) \vee \neg Z) \\
 \equiv & \quad \{(\text{elim} \Rightarrow)\} \\
 & (\neg P \vee (Q \wedge R)) \wedge ((\neg Q \wedge \neg S) \vee \neg Z) \\
 \Rightarrow & \quad \{(\text{simpl} \wedge) \text{ 2 volte, occorrenze positive}\} \\
 & (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg Z) \\
 \Rightarrow & \quad \{(\text{risoluzione})\} \\
 & \neg P \vee \neg Z \\
 \equiv & \quad \{(\text{elim} \Rightarrow)\} \\
 & Z \Rightarrow \neg P
 \end{aligned}$$

2. La formula non è una tautologia, in quanto l'interpretazione:  $\{P \mapsto \mathbf{T}, Q \mapsto \mathbf{F}, R \mapsto \mathbf{F}\}$  (o in alternativa  $R \mapsto \mathbf{T}$ ) la rende falsa. La seguente valutazione (riga della tabella di verità corrispondente all'interpretazione) giustifica la risposta:

$P$	$Q$	$R$	$\neg$	$(P \Rightarrow Q)$	$\Rightarrow$	$((\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow R \wedge Q)$
$T$	$F$	$F$	$T$	$T$	$F$	$\mathbf{F}$
			$3$	$1$	$2$	$1$
			$5$	$2$	$1$	$3$
			$4$	$1$	$2$	$1$

### ESERCIZIO 2

Si formalizzi il seguente enunciato usando l'alfabeto con simboli di predicato  $\{amico(-, -)\}$ , rispetto all'interpretazione fissata  $(\mathcal{P}, \alpha)$ , dove  $\mathcal{P}$  è l'insieme delle persone e  $\alpha(amico)(x, y)$  è vera se e solo se  $x$  è amico di  $y$ :

“Se una persona  $p$  ha almeno un amico, allora gli amici degli amici di  $p$  sono amici di  $p$ .”

### SOLUZIONE ESERCIZIO 2

$$(\exists x.amico(x, p) \Rightarrow (\forall z.( \forall w.amico(w, p) \wedge amico(z, w) \Rightarrow amico(z, p))))).$$

### ESERCIZIO 3

Si provi che la seguente formula è valida ( $A, B, C$  e  $D$  contengono la variabile libera  $x$ ):

$$\neg(\exists x . A \vee C) \vee (\forall x . \neg(D \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (\forall x . A \Rightarrow C \vee B)$$

### SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Per dimostrare la formula partiamo dalla premessa:

$$\begin{aligned} & \neg(\exists x . A \vee C) \vee (\forall x . \neg(D \Rightarrow \neg B)) \\ \equiv & \text{\{De Morgan\}} \\ & (\forall x . \neg(A \vee C)) \vee (\forall x . \neg(D \Rightarrow \neg B)) \\ \Rightarrow & \text{\{(\forall : \vee)\}} \\ & (\forall x . \neg(A \vee C) \vee \neg(D \Rightarrow \neg B)) \\ \equiv & \text{\{De Morgan\}} \\ & (\forall x . (\neg A \wedge \neg C) \vee \neg(D \Rightarrow \neg B)) \\ \equiv & \text{\{\neg : \Rightarrow, Doppia negazione\}} \\ & (\forall x . (\neg A \wedge \neg C) \vee (D \wedge B)) \\ \Rightarrow & \text{\{semp-l-\wedge, 2 volte, occorrenze positive\}} \\ & (\forall x . \neg A \vee B) \\ \Rightarrow & \text{\{intro-\vee, occorrenza positiva\}} \\ & (\forall x . \neg A \vee B \vee C) \\ \equiv & \text{\{elim-\Rightarrow\}} \\ & (\forall x . A \Rightarrow B \vee C) \end{aligned}$$

### ESERCIZIO 4

Assumendo **a**: array  $[0, 5)$  of nat e **b**: array  $[0, 7)$  of nat, si formalizzi il seguente enunciato:

“Ogni elemento dell'array **a** che è strettamente maggiore di un elemento dell'array **b** è anche strettamente minore di un elemento dell'array **b**.”

### SOLUZIONE ESERCIZIO 4

$$(\forall i.i \in [0, 5) \wedge (\exists j.j \in [0, 7) \wedge a[i] > b[j]) \Rightarrow (\exists k.k \in [0, 7) \wedge a[i] < b[k]))$$

## ESERCIZIO 5

Si consideri il seguente programma annotato (assumendo **a,b: array [0, n] of int**):

```

diff, x := 0, 0;
{Inv : x ∈ [0, n] ∧ diff = (∑i : i ∈ [0, x]. a[i]) - (∑j : j ∈ [0, x]. b[j])} {t: n - x}
while (x < n) do
    diff := a[x] + diff - b[x];
    x := x+1;
endw
{diff = (∑i : i ∈ [0, n]. a[i]) - (∑j : j ∈ [0, n]. b[j])}

```

Scrivere e dimostrare l'ipotesi di invarianza.

## SOLUZIONE ESERCIZIO 5

Invariante  $Inv : x \in [0, n] \wedge diff = (\sum i : i \in [0, x]. a[i]) - (\sum j : j \in [0, x]. b[j])$

Funzione di terminazione  $t : n - x$

Condizione  $E : x < n$

Comando  $C : diff := a[x] + diff - b[x]; x := x+1$

L' *Ipotesi di Invarianza* ( $\{Inv \wedge E\} C \{Inv \wedge def(E)\}$ ) in questo caso è

$$\{x \in [0, n] \wedge diff = (\sum i : i \in [0, x]. a[i]) - (\sum j : j \in [0, x]. b[j]) \wedge (x < n)\}$$

$$diff := a[x] + diff - b[x]; x := x+1$$

$$\{x \in [0, n] \wedge diff = (\sum i : i \in [0, x]. a[i]) - (\sum j : j \in [0, x]. b[j]) \wedge def(x < n)\}$$

Applicando la Regola della Sequenza, dobbiamo trovare una asserzione  $R$  tali che le seguenti triple siano verificate:

$$(5.1) \{x \in [0, n] \wedge diff = (\sum i : i \in [0, x]. a[i]) - (\sum j : j \in [0, x]. b[j]) \wedge (x < n)\} \quad diff := a[x] + diff - b[x] \quad \{R\}$$

$$(5.2) \{R\} \quad x := x + 1 \quad \{x \in [0, n] \wedge diff = (\sum i : i \in [0, x]. a[i]) - (\sum j : j \in [0, x]. b[j]) \wedge def(x < n)\}$$

Per determinare  $R$ , usiamo l'Assioma dell'Assegnamento in (5.2) e troviamo

$$def(x + 1) \wedge (x \in [0, n] \wedge diff = (\sum i : i \in [0, x]. a[i]) - (\sum j : j \in [0, x]. b[j]))^{[x+1/x]}$$

$$\equiv \{\text{sostituzione, definizione di def}\}$$

$$x + 1 \in [0, n] \wedge diff = (\sum i : i \in [0, x + 1]. a[i]) - (\sum j : j \in [0, x + 1]. b[j])$$

Quindi resta da verificare la tripla (5.1) per il valore di  $R$  appena calcolato. Applicando la Regola dell'Assegnamento, dobbiamo verificare che

$$(x \in [0, n] \wedge diff = (\sum i : i \in [0, x]. a[i]) - (\sum j : j \in [0, x]. b[j]) \wedge (x < n)) \Rightarrow def(a[x] + diff - b[x]) \wedge R^{[a[x] + diff - b[x] / diff]}$$

Partiamo dalla conseguenza, applicando la sostituzione

$$def(a[x] + diff - b[x]) \wedge R^{[a[x] + diff - b[x] / diff]}$$

$$\equiv \{\text{sostituzione}\}$$

$$def(a[x] + diff - b[x]) \wedge x + 1 \in [0, n] \wedge a[x] + diff - b[x] = (\sum i : i \in [0, x + 1]. a[i]) - (\sum j : j \in [0, x + 1]. b[j])$$

$$\equiv \{\mathbf{Ip}: (x \in [0, n]) \wedge (x < n), \text{definizione di def}\}$$

$$x \in dom(a) \wedge x \in dom(b) \wedge a[x] + diff - b[x] = (\sum i : i \in [0, x + 1]. a[i]) - (\sum j : j \in [0, x + 1]. b[j])$$

$$\equiv \{\mathbf{Ip}: (x \in [0, n]) \wedge (x < n) \wedge dom(a) = dom(b) = [0, n]\}$$

$$a[x] + diff - b[x] = (\sum i : i \in [0, x + 1]. a[i]) - (\sum j : j \in [0, x + 1]. b[j])$$

$$\equiv \{(\text{Intervallo-}\sum), 2 \text{ volte}\}$$

$$a[x] + diff - b[x] = ((\sum i : i \in [0, x]. a[i]) + a[x]) - ((\sum j : j \in [0, x]. b[j]) + b[x])$$

$$\equiv \{\text{calcolo}\}$$

$$diff = (\sum i : i \in [0, x]. a[i]) - (\sum j : j \in [0, x]. b[j])$$

$$\equiv \{\mathbf{Ip}: diff = (\sum i : i \in [0, x]. a[i]) - (\sum j : j \in [0, x]. b[j])\}$$

**T**

### ESERCIZIO 6

Si verifichi la seguente tripla di Hoare (assumendo **a, b: array [0, n] of int**):

```
{k ∈ [1, n - 1] ∧ j ∈ [0, k] ∧ (∀i . i ∈ [0, j] ⇒ (a[b[i]] > a[b[i] - 1]) ∧ (a[b[i]] > a[b[i] + 1]))}
  if (a[k] > a[k-1] and a[k] > a[k+1])
    then b[j] := k; j := j+1
    else skip
  fi;
{(∀i . i ∈ [0, j] ⇒ (a[b[i]] > a[b[i] - 1]) ∧ (a[b[i]] > a[b[i] + 1]))}
```

### SOLUZIONE ESERCIZIO 6

Chiamiamo  $P$  e  $Q$  le seguenti asserzioni,

$$Q = (\forall i . i \in [0, j] \Rightarrow (a[b[i]] > a[b[i] - 1]) \wedge (a[b[i]] > a[b[i] + 1]))$$

$$P = k \in [1, n - 1] \wedge j \in [0, k] \wedge Q$$

Per dimostrare la tripla data applichiamo la regola del Condizionale e ci riduciamo a dimostrare che

$$(6.1) P \Rightarrow \text{def}(a[k] > a[k - 1] \text{ and } a[k] > a[k + 1])$$

$$(6.2) \{P \wedge (a[k] > a[k - 1] \wedge a[k] > a[k + 1])\} \text{ b[j] := k; j := j+1 } \{Q\}$$

$$(6.3) \{P \wedge \neg(a[k] > a[k - 1] \wedge a[k] > a[k + 1])\} \text{ skip } \{Q\}$$

Per dimostrare (6.1) partiamo dalla conseguenza

$$\begin{aligned} & \text{def}(a[k] > a[k - 1] \text{ and } a[k] > a[k + 1]) \\ \equiv & \text{\{definizione di def\}} \\ & k \in \text{dom}(a) \wedge k - 1 \in \text{dom}(a) \wedge k + 1 \in \text{dom}(a) \\ \equiv & \text{\{Ip: } k \in [1, n - 1] \wedge \text{dom}(a) = \text{dom}(b) = [0, n]\}} \\ & \mathbf{T} \end{aligned}$$

Per dimostrare (6.2) applichiamo la regola della sequenza e ci riduciamo a verificare le seguenti triple

$$(6.2.1) \{P \wedge (a[k] > a[k - 1] \wedge a[k] > a[k + 1])\} \text{ b[j] := k } \{R\}$$

$$(6.2.2) \{R\} \text{ j := j+1 } \{Q\}$$

Partiamo da (6.2.2) e determiniamo l'asserzione  $R$  applicando l'Assioma dell'assegnamento

$$\begin{aligned} & \text{def}(j + 1) \wedge Q^{[j+1/j]} \\ \equiv & \text{\{sostituzione, definizione di def\}} \\ & (\forall i . i \in [0, j + 1] \Rightarrow (a[b[i]] > a[b[i] - 1]) \wedge (a[b[i]] > a[b[i] + 1])) \end{aligned}$$

Nel caso di (6.2.2) applichiamo l'Assioma dell'Aggiornamento Selettivo, e la regola PRE. Quindi ci riduciamo a verificare che

$$P \wedge (a[k] > a[k - 1] \wedge a[k] > a[k + 1]) \Rightarrow \text{def}(j) \wedge \text{def}(k) \wedge j \in \text{dom}(b) \wedge R[b'/b]$$

dove  $b' = b[k/j]$ .

Partiamo dalla conseguenza

$$\begin{aligned} & \text{def}(j) \wedge \text{def}(k) \wedge j \in \text{dom}(b) \wedge R[b'/b] \\ \equiv & \text{\{definizione di def\}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& j \in \text{dom}(b) \wedge R[b'/b] \\
\equiv & \{ \mathbf{Ip}: k \in [1, n-1] \wedge j \in [0, k] \wedge \text{dom}(b) = [0, n] \} \\
& (\forall i. i \in [0, j+1] \Rightarrow (a[b'[i]] > a[b'[i]-1]) \wedge (a[b'[i]] > a[b'[i]+1])) \\
\equiv & \{ (\text{Intervallo-}\forall) \} \\
& (\forall i. i \in [0, j] \Rightarrow (a[b'[i]] > a[b'[i]-1]) \wedge (a[b'[i]] > a[b'[i]+1])) \wedge (a[b'[j]] > a[b'[j]-1]) \wedge (a[b'[j]] > a[b'[j]+1]) \\
\equiv & \{ \text{definizione di } b', b'[j] = k \} \\
& (\forall i. i \in [0, j] \Rightarrow (a[b'[i]] > a[b'[i]-1]) \wedge (a[b'[i]] > a[b'[i]+1])) \wedge (a[k] > a[k-1]) \wedge (a[k] > a[k+1]) \\
\equiv & \{ \mathbf{Ip}: (a[k] > a[k-1]) \wedge (a[k] > a[k+1]) \} \\
& (\forall i. i \in [0, j] \Rightarrow (a[b'[i]] > a[b'[i]-1]) \wedge (a[b'[i]] > a[b'[i]+1])) \\
\equiv & \{ \text{definizione di } b', (\forall i. i \in [0, j] \Rightarrow i \neq j) \} \\
& (\forall i. i \in [0, j] \Rightarrow (a[b[i]] > a[b[i]-1]) \wedge (a[b[i]] > a[b[i]+1])) \\
\equiv & \{ \mathbf{Ip}: (\forall i. i \in [0, j] \Rightarrow (a[b[i]] > a[b[i]-1]) \wedge (a[b[i]] > a[b[i]+1])) \} \\
& \mathbf{T}
\end{aligned}$$

Per dimostrare (6.3) applichiamo la regola del Comando Vuoto e ci riduciamo a verificare la seguente asserzione

$$P \wedge \neg(a[k] > a[k-1] \wedge a[k] > a[k+1]) \Rightarrow Q$$

Partiamo dalla conseguenza

$$\begin{aligned}
& (\forall i. i \in [0, j] \Rightarrow (a[b[i]] > a[b[i]-1]) \wedge (a[b[i]] > a[b[i]+1])) \\
\equiv & \{ \mathbf{Ip}: (\forall i. i \in [0, j] \Rightarrow (a[b[i]] > a[b[i]-1]) \wedge (a[b[i]] > a[b[i]+1])) \} \\
& \mathbf{T}
\end{aligned}$$