

Logica per la Programmazione - LPP 2013/14

Leggi sul calcolo proposizionale		
$A \vee F \equiv A$	$A \wedge T \equiv A$	(unità)
$A \vee T \equiv T$	$A \wedge F \equiv F$	(assorbimento o zero)
$A \wedge A \equiv A$	$A \vee A \equiv A$	(idempotenza)
$A \wedge B \equiv B \wedge A$	$A \vee B \equiv B \vee A$	(commutatività)
$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$	(associatività)
$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	(distributività)
$\neg T \equiv F$	$\neg \neg A \equiv A$	(T : F / doppia negazione)
$A \vee \neg A \equiv T$	$A \wedge \neg A \equiv F$	(terzo escluso / contraddizione)
$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$	(De Morgan)
$(A \equiv B) \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (A \Leftarrow B)$	$(A \equiv B) \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$	(elim.- \equiv / elim.- \equiv -bis)
$(A \Leftarrow B) \equiv (B \Rightarrow A)$	$(A \Rightarrow B) \equiv \neg A \vee B$	(elim.- \Leftarrow / elim.- \Rightarrow)
$\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$	$\neg(A \equiv B) \equiv (A \equiv \neg B)$	($\neg \Rightarrow$ / $\neg \equiv$)
$A \vee (\neg A \wedge B) \equiv A \vee B$	$A \wedge (\neg A \vee B) \equiv A \wedge B$	(complemento)
$A \vee (A \wedge B) \equiv A$	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$	(assorbimento)
$(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A)$	$(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$	(contronominale / Modus Ponens)
$A \wedge B \Rightarrow A$	$A \Rightarrow A \vee B$	(semplif.- \wedge / introd.- \vee)
$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	$(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \Rightarrow A \vee C$	(transitività- \Rightarrow / risoluzione)

Semantica di formule del primo ordine per interpretazione $I = (\mathbf{D}, \alpha)$ e assegnamento $\rho : V \rightarrow \mathbf{D}$

Semantica di termini

(R0) se t è la variabile x , allora $\alpha_\rho(t) = \rho(x)$;

(R1) se t è la costante c , allora $\alpha_\rho(t) = \alpha(c)$;

(R2) se t è il termine $f(t_1, \dots, t_n)$ allora $\alpha_\rho(t) = \alpha(f)(\alpha_\rho(t_1), \dots, \alpha_\rho(t_n))$.

Semantica di formule

(S1) se φ è la formula atomica $p(t_1, \dots, t_n)$ allora $I_\rho(\varphi) = \alpha(p)(\alpha_\rho(t_1), \dots, \alpha_\rho(t_n))$

(S3) se φ è la formula $\neg P$, allora $I_\rho(\varphi) = \overline{I_\rho(P)}$, dove $\overline{T} = F$ e $\overline{F} = T$

(S4) se $\varphi = P \wedge Q$, allora $I_\rho(\varphi) = T$ se $I_\rho(P) = T$ e $I_\rho(Q) = T$; altrimenti $I_\rho(\varphi) = F$

(S5) se $\varphi = P \vee Q$, allora $I_\rho(\varphi) = F$ se $I_\rho(P) = F$ e $I_\rho(Q) = F$; altrimenti $I_\rho(\varphi) = T$

(S6) se $\varphi = P \Rightarrow Q$, allora $I_\rho(\varphi) = F$ se $I_\rho(P) = T$ e $I_\rho(Q) = F$; altrimenti $I_\rho(\varphi) = T$

(S7) se $\varphi = P \equiv Q$, allora $I_\rho(\varphi) = T$ se $I_\rho(P) = I_\rho(Q)$; altrimenti $I_\rho(\varphi) = F$

(S8) se $\varphi = (\forall x.P)$, allora $I_\rho(\varphi) = T$ se $I_{\rho[d/x]}(P) = T$ per qualunque $d \in \mathbf{D}$; altrimenti $I_\rho(\varphi) = F$

(S9) se $\varphi = (\exists x.P)$, allora $I_\rho(\varphi) = T$ se c'è un elemento $d \in \mathbf{D}$ per cui $I_{\rho[d/x]}(P) = T$; altrimenti $I_\rho(\varphi) = F$

Leggi sui quantificatori

$(\forall x.P) \Rightarrow P[t/x]$	$P[t/x] \Rightarrow (\exists x.P)$	con t termine (elim- \forall / intro- \exists)
$\neg(\exists x.A) \equiv (\forall x.\neg A)$	$\neg(\forall x.A) \equiv (\exists x.\neg A)$	(De Morgan)
$(\forall x.A \wedge B) \equiv (\forall x.A) \wedge (\forall x.B)$	$(\exists x.A \vee B) \equiv (\exists x.A) \vee (\exists x.B)$	(\forall : \wedge / \exists : \vee)
$(\forall x.A) \vee (\forall x.B) \Rightarrow (\forall x.A \vee B)$	$(\exists x.A \wedge B) \Rightarrow (\exists x.A) \wedge (\exists x.B)$	(\forall : \vee / \exists : \wedge)
$(\forall x.x = y \Rightarrow P) \equiv P[y/x]$	$x = y \Rightarrow P \equiv P[y/x]$	(Leibniz)
$(\forall x.A) \equiv A \quad (\exists x.A) \equiv A$	$(\exists x.x = y \wedge P) \equiv P[y/x]$	(singoletto)
	se x non è libera in A e il dominio non è vuoto	(costante)

Leggi su dominio e intervalli

$(\forall x. A \vee B \Rightarrow P) \equiv (\forall x. A \Rightarrow P) \wedge (\forall x. B \Rightarrow P)$	(dominio- \forall)
$(\exists x. (A \vee B) \wedge P) \equiv (\exists x. A \wedge P) \vee (\exists x. B \wedge P)$	(dominio- \exists)
$(\forall x. x \in [a, b] \Rightarrow P) \equiv (\forall x. x \in [a, b] \Rightarrow P) \wedge P^{[b/x]}$, se $a \leq b$	(interv- \forall)
$(\exists x. x \in [a, b] \wedge P) \equiv (\exists x. x \in [a, b] \wedge P) \vee P^{[b/x]}$, se $a \leq b$	(interv- \exists)
$(\Sigma x : x \in [a, b] \wedge P. E) = \begin{cases} (\Sigma x : x \in [a, b] \wedge P. E) + E^{[b/x]} & \text{se } a \leq b \text{ e } P^{[b/x]} \\ (\Sigma x : x \in [a, b] \wedge P. E) & \text{se } a \leq b \text{ e } \neg P^{[b/x]} \end{cases}$	(interv- Σ)
$\#\{x : x \in [a, b] \mid P\} = \begin{cases} \#\{x : x \in [a, b] \mid P\} + 1 & \text{se } a \leq b \text{ e } P^{[b/x]} \\ \#\{x : x \in [a, b] \mid P\} & \text{se } a \leq b \text{ e } \neg P^{[b/x]} \end{cases}$	(interv- $\#$)
$(\mathbf{m} x : x \in [a, b] \wedge P. E) = \begin{cases} (\mathbf{m} x : x \in [a, b] \wedge P. E) m E^{[b/x]} & \text{se } a \leq b \text{ e } P^{[b/x]} \\ (\mathbf{m} x : x \in [a, b] \wedge P. E) & \text{se } a \leq b \text{ e } \neg P^{[b/x]} \end{cases}$	$\mathbf{m} \in \{\mathbf{max}, \mathbf{min}\}$ (interv- \mathbf{m})

Regole di inferenza per Calcolo Proposizionale e Logica dei Predicati

$\frac{P \equiv Q}{R \equiv R^{[Q/P]}}$	(Principio di sostituzione per \equiv)
$\frac{P \Rightarrow Q \quad P \text{ occorre positivamente in } R}{R \Rightarrow R^{[Q/P]}}$	(Principio di sostituzione per \Rightarrow (1))
$\frac{P \Rightarrow Q \quad P \text{ occorre negativamente in } R}{R \Leftarrow R^{[Q/P]}}$	(Principio di sostituzione per \Rightarrow (2))
$\frac{\Gamma \vdash P^{[d/x]}, \text{ con } d \text{ nuova costante}}{\Gamma \vdash (\forall x. P)}$	(Generalizzazione)
$\frac{(\exists x. P) \in \Gamma \quad \Gamma, P^{[d/x]} \vdash Q, \text{ con } d \text{ nuova costante}}{\Gamma \vdash Q}$	(Skolemizzazione)
$\frac{R \Rightarrow P^{[d/x]}, \text{ con } d \text{ nuova costante}}{R \Rightarrow (\forall x. P)}$	(Generalizzazione- \Rightarrow)
$\frac{(\exists x. P) \wedge P^{[d/x]} \wedge R \Rightarrow Q, \text{ con } d \text{ nuova costante}}{(\exists x. P) \wedge R \Rightarrow Q}$	(Skolemizzazione- \Rightarrow)

Triple di Hoare: Assiomi

$\{R\} \text{ skip } \{R\}$	(SKIP)	$\{def(E) \wedge P^{[E/x]}\} x := E \{P\}$	(ASS)
$\{def(E_1) \wedge \dots \wedge def(E_k) \wedge P^{[E_1, \dots, E_k/x_1, \dots, x_k]}\} x_1, \dots, x_k := E_1, \dots, E_k \{P\}$			(ASS-MULT)
$\{def(E) \wedge def(E') \wedge E \in dom(\mathbf{a}) \wedge P^{[b/a]}\} \mathbf{a}[E] := E' \{P\}$,		dove $\mathbf{b} = \mathbf{a}^{[E'/E]}$	(AGG-SEL)

Triple di Hoare: Regole di Inferenza

$\frac{P \Rightarrow P' \quad \{P'\} C \{R'\} \quad R' \Rightarrow R}{\{P\} C \{R\}}$	(PRE-POST)	$\frac{P \Rightarrow R}{\{P\} \text{ skip } \{R\}}$	(SKIP)
$\frac{P \Rightarrow def(E) \wedge R^{[E/x]}}{\{P\} x := E \{R\}}$	(ASS)	$\frac{\{P\} C_1 \{R\} \quad \{R\} C_2 \{Q\}}{\{P\} C_1 ; C_2 \{Q\}}$	(SEQ)
$\frac{P \Rightarrow def(E) \quad \{P \wedge E\} C_1 \{R\} \quad \{P \wedge \neg E\} C_2 \{R\}}{\{P\} \text{ if } E \text{ then } C_1 \text{ else } C_2 \text{ fi } \{R\}}$	(COND)		
$\frac{P \Rightarrow Inv \wedge def(E) \quad Inv \wedge \neg E \Rightarrow R \quad Inv \Rightarrow t \geq 0 \quad \{Inv \wedge E\} C \{Inv \wedge def(E)\} \quad \{Inv \wedge E \wedge t = V\} C \{t < V\}}{\{P\} \text{ while } E \text{ do } C \text{ endw } \{R\}}$	(WHILE)		