



LOGICA DEL PRIMO ORDINE: SEMANTICA

**Corso di Logica per la Programmazione
A.A. 2010/11**

Andrea Corradini, Paolo Mancarella

LA SEMANTICA DELLA LOGICA DEL PRIMO ORDINE

- Sia fissato un linguaggio L del primo ordine con alfabeto (C, F, V, P) .
- Data un'interpretazione $I = (D, \alpha)$ e una formula φ su L , vogliamo definire in modo formale la **semantica** di φ in I , cioè il suo **valore di verità**
- Per far questo, dobbiamo prima dare la **semantica** dei termini che compaiono in φ
 - I termini **chiusi** denotano elementi del dominio
 - Se un termine contiene delle variabili, allora è **aperto**. La sua semantica dipende da un **assegnamento** che associa un elemento del dominio ad ogni variabile.



UN ESEMPIO DI INTERPRETAZIONE

○ Il linguaggio L

- $C = \{\mathbf{a}\}$
- $F = \{\mathbf{f}\}$, con arietà 1
- $P = \{\mathbf{p}\}$, con arietà 2

○ L'interpretazione $I = (D, \alpha)$

- $D = \mathbb{N}$, insieme dei numeri naturali
- $\alpha(\mathbf{a}) = 0$
- $\alpha(\mathbf{f})$ è la funzione successore: $\alpha(\mathbf{f})(n) = n + 1$
- $\alpha(\mathbf{p})$ è la relazione di maggiore sui naturali, per esempio
 $\alpha(\mathbf{p})(7, 5) \equiv \mathbf{T}$
 $\alpha(\mathbf{p})(11, 18) \equiv \mathbf{F}$



SEMANTICA DEI TERMINI CHIUSI

- Ricordiamo la definizione di termine:
 - Ogni costante in C e ogni variabile in V è un termine
 - $f \in F, t_1, \dots, t_n$ sono termini $\Rightarrow f(t_1, \dots, t_n)$ è un termine
- Data un'interpretazione $\mathbf{I} = (\mathbf{D}, \alpha)$, la semantica di un termine **chiuso** t (senza variabili) è ottenuta per **induzione strutturale**:
 - (R1) se t è una costante \mathbf{c} allora $\alpha(t) = \alpha(\mathbf{c})$
 - (R2) se $t = \mathbf{f}(t_1, \dots, t_n)$ e $\alpha(t_1) = d_1, \dots, \alpha(t_n) = d_n$ allora $\alpha(t) = \alpha(\mathbf{f})(d_1, \dots, d_n)$

Esempio (ricordiamo che $\alpha(\mathbf{a}) = 0, \alpha(\mathbf{f})(n) = n + 1$):

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{a})))) &= \alpha(\mathbf{f})(\alpha(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{a})))) + 1 &= \alpha(\mathbf{a}) + 1 + 2 \\ &= \alpha(\mathbf{f})(\alpha(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{a})))) &= \alpha(\mathbf{f}(\mathbf{a})) + 1 + 1 &= 0 + 3 \\ &= \alpha(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))) + 1 &= \alpha(\mathbf{f})(\alpha(\mathbf{a})) + 2 &= 3 \end{aligned}$$

NB: la semantica di un termine chiuso è un elemento del dominio

ASSEGNAMENTI

- E' possibile dare semantica ad un termine aperto (contenente variabili) rispetto ad un **assegnamento**
- Un assegnamento è una funzione che associa ad ogni variabile in V un elemento del dominio D : $\rho: V \rightarrow D$
- Con $\rho[d/x]$ intendiamo l'assegnamento ρ modificato in modo tale che associ alla variabile x il valore d , ovvero

$$(\rho[d/x])(y) = d \text{ se } x = y,$$

$$(\rho[d/x])(y) = \rho(y) \quad \text{altrimenti}$$

- Es. se $D = \mathbb{N}$, $\rho(x) = 0$, $\rho(y) = 3$, $\rho(z) = 1$ e

$$\rho_1 = \rho[15/z],$$

allora

$$\rho_1(x) = 0, \rho_1(y) = 3, \rho_1(z) = 15$$



SEMANTICA DEI TERMINI APERTI

- Data un'interpretazione $\mathbf{I} = (\mathbf{D}, \alpha)$ e un **assegnamento** $\rho: V \rightarrow \mathbf{D}$, la semantica di un termine aperto t , in simboli $\alpha_\rho(t)$, è ottenuta con le tre regole:
- (R0) se t è la variabile x allora $\alpha_\rho(t) = \rho(x)$
- (R1) se t è una costante c allora $\alpha_\rho(t) = \alpha(c)$
- (R2) se $t = f(t_1, \dots, t_n)$ e $\alpha_\rho(t_1) = d_1, \dots, \alpha_\rho(t_n) = d_n$ allora $\alpha_\rho(t) = (\alpha(f))(d_1, \dots, d_n)$
- Esempio: considerando l'esempio precedente, se $\rho(x) = 2$, allora $\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(x))) = \alpha(x) + 1 + 1 = 4$



SEMANTICA DI FORMULE ATOMICHE

- Definizione: $p \in P$, t_1, \dots, t_n sono termini \Rightarrow
 $p(t_1, \dots, t_n)$ è una formula atomica
- Semantica di una formula atomica φ nell'interpretazione I sotto un assegnamento ρ , (in simboli $I_\rho(\varphi)$) per **induzione strutturale**:
- (S1) se $\varphi = p(t_1, \dots, t_n)$ e $\alpha_\rho(t_1) = d_1, \dots, \alpha_\rho(t_n) = d_n$ allora
 $I_\rho(\varphi) = (\alpha(p))(d_1, \dots, d_n)$
 - caso particolare: il predicato a zero argomenti, ovvero la proposizione:
 $I_\rho(p) = \alpha(p)$
- (S2) se $\varphi = (P)$ allora $I_\rho(\varphi) = I_\rho(P)$,
ovvero le parentesi hanno influenza solo sull'ordine di valutazione, ma non sul valore delle formule



SEMANTICA DEI CONNETTIVI LOGICI, PER INDUZIONE STRUTTURALE

- (S3) $I_\rho(\sim P) = \mathbf{T}$ se ...

$$I_\rho(P) = \mathbf{F}, \quad I_\rho(\sim P) = \mathbf{F} \text{ se } I_\rho(P) = \mathbf{T}$$

- (S4) $I_\rho(P \wedge Q) = \mathbf{T}$ se ...

$$I_\rho(P) = \mathbf{T} \text{ e } I_\rho(Q) = \mathbf{T}, \quad I_\rho(P \wedge Q) = \mathbf{F} \text{ altrimenti}$$

- (S5) $I_\rho(P \vee Q) = \mathbf{F}$ se ...

$$I_\rho(P) = \mathbf{F} \text{ e } I_\rho(Q) = \mathbf{F}, \quad I_\rho(P \vee Q) = \mathbf{T} \text{ altrimenti}$$

- (S6) $I_\rho(P \Rightarrow Q) = \mathbf{F}$ se ...

$$I_\rho(P) = \mathbf{T} \text{ e } I_\rho(Q) = \mathbf{F}, \quad I_\rho(P \Rightarrow Q) = \mathbf{T} \text{ altrimenti}$$

- (S7) $I_\rho(P \equiv Q) = \mathbf{T}$ se ...

$$I_\rho(P) = I_\rho(Q), \quad I_\rho(P \equiv Q) = \mathbf{F} \text{ altrimenti}$$



SEMANTICA DEI QUANTIFICATORI

- (S8) $I_\rho((\forall x.P)) = \mathbf{T}$ se ...
 - ... $I_{\rho[d/x]}(P) = \mathbf{T}$ per qualunque \mathbf{d} in D ,
 - $I_\rho((\forall x.P)) = \mathbf{F}$ altrimenti
- (S9) $I_\rho((\exists x.P)) = \mathbf{T}$ se ...
 - ... $I_{\rho[d/x]}(P) = \mathbf{T}$ per almeno un \mathbf{d} in D ,
 - $I_\rho((\exists x.P)) = \mathbf{F}$ altrimenti
- **Nota:** l'uso dell'assegnamento ρ è necessario perché bisogna far riferimento all'intero dominio D : ci possono essere elementi di D non denotabili con termini chiusi.
- **Es:** $D = \mathbb{N}$, $C = \{0, 2\}$, $F = \{ _ + _ \}$, $P = \{ \text{pari}(_) \}$
La formula $(\exists x. \sim \text{pari}(x))$ è vera, ma non esiste un termine chiuso \mathbf{t} tale che $\sim \text{pari}(\mathbf{t})$ sia vera



ESEMPIO DI SEMANTICA: VALORE DI VERITA' DI FORMULE

	Dominio	a	b	c	p(x)
I_1	città italiane	Milano	Roma	Pontedera	x capoluogo
I_2	{5,10,15}	5	10	15	x multiplo di 5
I_3	numeri naturali	5	10	15	x multiplo di 5

Formula	Valore in I_1	Valore in I_2	Valore in I_3
$p(a)$	T	T	T
$p(b)$	T	T	T
$p(c)$	F	T	T
$p(a) \wedge p(c)$	F	T	T
$(\exists x.p(x))$	T	T	T
$(\forall x.p(x))$	F	T	F
$(\exists x.p(x)) \wedge (\exists y.\sim p(y))$	T	F	T



Esercizio

Mostrare che la formula

$$(\exists x.Q(x) \wedge (\forall y.P(x, y)))$$

è vera nell'interpretazione $I = (D, \alpha)$ dove $D = \{a, b\}$ ed α è definita come segue:

$$\alpha(P)(x, y) = \begin{cases} T & \text{se } x = a \text{ e } y = a \text{ oppure } x = a \text{ e } y = b, \\ F & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$\alpha(Q)(x) = \begin{cases} T & \text{se } x = a \text{ oppure } x = b, \\ F & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

○ Soluzione:

- Usare le regole (S1)-(S9) per induzione strutturale



Esercizio

Calcolare il valore di verità della formula

$$\Phi \equiv (\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x) \vee R(x))$$

nell'interpretazione $I = (D, \alpha)$ dove $D = \{a, b, c\}$ e α è definita come segue:

$$\alpha(P)(x) = \begin{cases} T & \text{se } x = a \text{ o } x = b \\ F & \text{se } x = c \end{cases} \quad \alpha(Q)(x) = \begin{cases} T & \text{se } x = a \text{ o } x = c \\ F & \text{se } x = b \end{cases}$$

$$\alpha(R)(x) = \begin{cases} T & \text{se } x = b \\ F & \text{se } x = a \text{ o } x = c \end{cases}$$

Calcolare cioè il valore di $I_{\rho_0}(\Phi)$ usando le regole della semantica del prim'ordine, dove ρ_0 è un assegnamento arbitrario.

