



CALCOLO PROPOSIZIONALE

Corso di Logica per la Programmazione

Andrea Corradini

andrea@di.unipi.it

UN PROBLEMA DI DEDUZIONE LOGICA

(da un test d'ingresso)

- Tre amici, Antonio, Bruno e Corrado, sono incerti se andare al cinema. Si sa che:
 - Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio;
 - Condizione necessaria perché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno.
- Il giorno successivo possiamo affermare con certezza che:
 - 1) Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno
 - 2) Nessuno dei tre amici è andato al cinema
 - 3) Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado
 - 4) Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno
- *Come si formalizza? Come si può usare una dimostrazione per rispondere alla domanda?*



IL CALCOLO PROPOSIZIONALE

- E' il nucleo di (quasi) tutte le logiche. Limitato potere espressivo, ma sufficiente per introdurre il concetto di dimostrazione.
- Le *proposizioni (enunciati dichiarativi)* sono asserzioni a cui sia assegnabile in modo univoco un valore di verità in accordo ad una interpretazione del mondo a cui si riferiscono.
- “dichiarativi sono non già tutti i discorsi, ma quelli in cui sussiste una enunciazione vera oppure falsa”

Aristotele



ESEMPI DI PROPOSIZIONI “ATOMICHE”

1. Roma è la capitale d'Italia
2. La Francia è uno stato del continente asiatico
3. $1+1 = 2$
4. $2+2 = 3$



ESEMPI DI NON PROPOSIZIONI

1. Che ora è?
2. Leggete queste note con attenzione
3. $X+1 = 2$



CONNETTIVI LOGICI

| <i>Connettivo</i> | <i>Forma simbolica</i> | <i>Operazione corrispondente</i> |
|-------------------|------------------------|----------------------------------|
| not | $\sim p$ | negazione |
| and, e | $p \wedge q$ | congiunzione |
| or, oppure | $p \vee q$ | disgiunzione |
| se p allora q | $p \Rightarrow q$ | implicazione |
| p se e solo se q | $p \equiv q$ | equivalenza |
| p se q | $p \Leftarrow q$ | conseguenza |



SINTASSI DELLE PROPOSIZIONI (GRAMMATICA)

Prop ::=

Prop \equiv Prop | Prop \wedge Prop | Prop \vee Prop |

Prop \Rightarrow Prop | Prop \Leftarrow Prop |

Atom | \sim Atom

Atom ::=

T | **F** | Ide | (Prop)

Ide ::=

p | q | ... | P | Q | ...



SEMANTICA (SIGNIFICATO) DELLE PROPOSIZIONI

- Tabelle di verità dei connettivi logici:

| P | Q | $\neg P$ | $P \wedge Q$ | $P \vee Q$ | $P \Rightarrow Q$ | $P \equiv Q$ | $P \Leftarrow Q$ |
|-----|-----|----------|--------------|------------|-------------------|--------------|------------------|
| T | T | F | T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | T | F | F | T |
| F | T | T | F | T | T | F | F |
| F | F | T | F | F | T | T | T |

- Si osservi in particolare il valore di verità di un'implicazione (o di una conseguenza)



CALCOLO PROPOSIZIONALE PER FORMALIZZARE ENUNCIATI: ESEMPIO

- Tre amici, Antonio, Bruno e Corrado, sono incerti se andare al cinema.
 - *Introduciamo tre proposizioni:*
 - **A** \equiv “Antonio va al cinema”
 - **B** \equiv “Bruno va al cinema”
 - **C** \equiv “Corrado va al cinema”
- Si sa che:
 - Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio;
 - **C** \Rightarrow **A**
 - Condizione necessaria perché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno.
 - **A** \Rightarrow **B**



CALCOLO PROPOSIZIONALE PER FORMALIZZARE ENUNCIATI: ESEMPIO

- Il giorno successivo possiamo affermare con certezza che:
 - Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno
 - $C \Rightarrow B$
 - Nessuno dei tre amici è andato al cinema
 - $\sim A \wedge \sim B \wedge \sim C$
 - Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado
 - $B \Rightarrow C$
 - Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno
 - $\sim C \Rightarrow \sim B$
- Per rispondere alla domanda, dobbiamo capire quale di queste quattro proposizioni è *conseguenza logica* delle proposizioni precedenti



FORMALIZZAZIONE DI ENUNCIATI: ESEMPI

- Piove e fa molto freddo
- Fa freddo, ma non piove
- Se ci sono nuvole e non c'è vento, allora piove
- Piove solo se ci sono nuvole e non c'è vento
- Nevica, ma non fa freddo se ci si copre
- Se ci si copre, allora fa freddo o nevica



Formalizzazione di implicazioni in linguaggio naturale

Scrivere la proposizione rappresentata da ognuna delle seguenti frasi in italiano:

- Se P allora Q
- P è una conseguenza di Q
- P è condizione necessaria e sufficiente per Q
- P è condizione necessaria per Q
- P è condizione sufficiente per Q
- P vale solo se vale Q
- P vale se vale Q
- P vale se e solo se vale Q
- Condizione necessaria perché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno



TAUTOLOGIE E CONTRADDIZIONI

- Una **tautologia** è una formula del calcolo proposizionale che vale **T** per qualunque valore **T/F** assegnato alle variabili proposizionali
 - Esempio: $p \vee \sim p$ (vedi tabella di verità)
- Una **contraddizione** è una formula che vale **F** per qualunque valore **T/F** assegnato alle variabili proposizionali
- Quindi **P** è una tautologia se e solo se $\sim P$ è una contraddizione



IMPLICAZIONI E EQUIVALENZE TAUTOLOGICHE

- Diciamo che

p implica tautologicamente *q*

se e solo se

$p \Rightarrow q$ è una tautologia

p è tautologicamente equivalente a *q*

se e solo se

$p \equiv q$ è una tautologia

- Praticamente tutti i problemi nel Calcolo Proposizionale si riducono a dimostrare che una proposizione è una tautologia.
- Come si può dimostrare?



DIMOSTRAZIONE DI TAUTOLOGIE

- Per dimostrare che p è una tautologia possiamo
 - Usare le tabelle di verità
 - Del tutto meccanico, richiede di considerare 2^n casi, dove n è il numero di variabili proposizionali in p
 - Cercare di costruire una dimostrazione
 - Usando delle leggi (tautologie già dimostrate)
 - Usando opportune *regole di inferenza*
 - Si possono impostare vari tipi di dimostrazione
 - Mostrare che non è una tautologia
 - individuando valori delle variabili proposizionali che rendono falsa p

