CALCOLO PROPOSIZIONALE: Esercizi proposti

Corso di Logica per la Programmazione

Andrea Corradini
andrea@di.unipi.it

Implicazioni, implicazioni, ...

- Formalizzare i seguenti enunciati, usando ***C*** per “io vado al cinema” e ***R*** per “tu resti a casa”:

1) Io vado al cinema solo se tu resti a casa
2) Io vado al cinema se tu resti a casa
3) Io vado al cinema se e solo se tu resti a casa
4) Perché io vada al cinema è necessario che tu resti a casa
5) Perché io vada al cinema è sufficiente che tu resti a casa
6) Condizione necessaria e sufficiente perché io vada al cinema è che tu resti a casa

LEGGI PER L'EQUIVALENZA ($\equiv$)

- Mostrare che le seguenti proposizioni sono tautologie, usando le tabelle di verità

- $p \equiv p$ (Riflessività)
- $(p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$ (Simmetria)
- $((p \equiv q) \equiv r) \equiv (p \equiv (q \equiv r))$ (Associatività)

LEGGI PER CONGIUNZIONE E DISGIUNZIONE

- Mostrare che le seguenti proposizioni sono tautologie, usando le tabelle di verità

$p \vee q \equiv q \vee p$	(Commutatività)
$p \wedge q \equiv q \wedge p$	
$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$	(Associatività)
$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	
$p \vee p \equiv p$	(Idempotenza)
$p \wedge p \equiv p$	
$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$	(Unità)
$p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	(Zero)
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	(Distributività)
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	

LEGGI DELLA NEGAZIONE

- Mostrare che le seguenti proposizioni sono tautologie, usando le tabelle di verità

$\sim(\sim p) \equiv p$	(Doppia negazione)
$p \vee \sim p \equiv \mathbf{T}$	(Terzo escluso)
$p \wedge \sim p \equiv \mathbf{F}$	(Contraddizione)
$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	(De Morgan)
$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	
$\sim\mathbf{T} \equiv \mathbf{F}$	(**T**:**F**)
$\sim\mathbf{F} \equiv \mathbf{T}$	(**F:T**)

COME POSSIAMO ESSERE CERTI DELLA RISPOSTA?

- Esercizio: mostrare che (2) e (4) **non sono tautologie**

1) $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow B)$
2) $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\sim A \wedge \sim B \wedge \sim C)$
3) $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
4) $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\sim C \Rightarrow \sim B)$

INSIEMI FUNZIONALMENTE COMPLETI DI CONNETTIVI LOGICI

- **Esercizio**: Mostrare che $\{\vee, \sim\}$ e $\{\Rightarrow, \sim\}$ sono funzionalmente completi
- Si consideri il connettivo proposizionale binario **nand** la cui semantica è definita dalla seguente tabella di verità:

P	Q	P **nand** Q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

- Si provi che l'insieme { **nand** } è funzionalmente completo.

AMBIGUITA' DELLA GRAMMATICA DEL CALCOLO PROPOSIZIONALE

- Mostrare che $\mathbf{P} \Rightarrow (\sim\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q})$ è una tautologia, mentre $(\mathbf{P} \Rightarrow \sim\mathbf{P}) \Rightarrow \mathbf{Q}$ non lo è.

OCCORRENZE POSITIVE E NEGATIVE

- Dire se la variabile proposizionale p compare positivamente o negativamente nelle seguenti formule proposizionali:
- $(p \Rightarrow \sim p) \Rightarrow \sim p$
- $(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$
- $((p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$
- $(p \Rightarrow \zeta \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$
- $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$
- $p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r))$