

Zero, nulla e nessuno

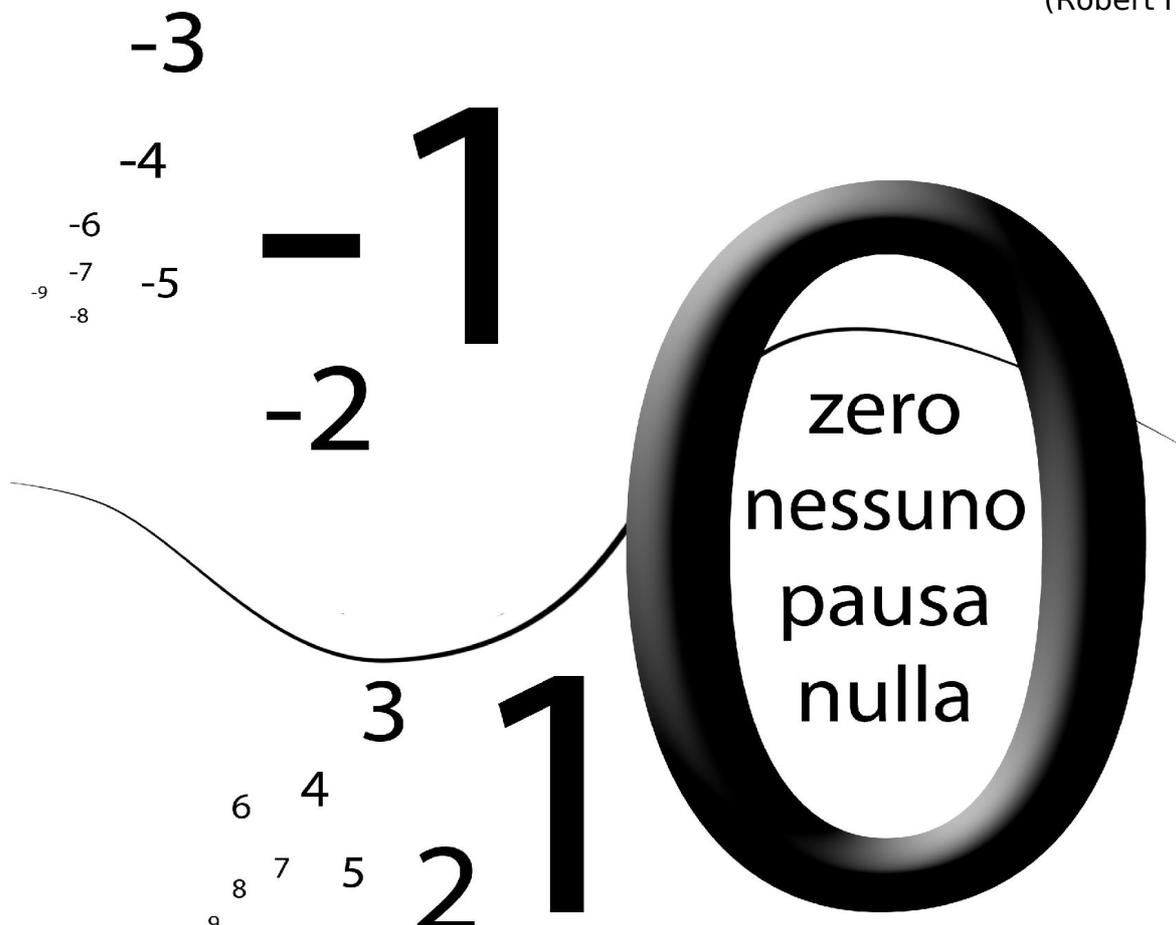
*Tesina a cura di Marco Cornolti
per il corso di Informatica e Cultura,
tenuto dal prof. Francesco Romani
Corso di Laurea in Informatica – Università di Pisa.
Pisa, luglio 2007.*

*“Un'altra volta io gli stendea la coppa.
Tre volte io la gli stesi; ed ei ne vide
nella stoltezza sua tre volte il fondo.
Quando m'accorsi che saliti al capo
del possente licor gli erano i fumi,
voci blande io drizzavagli: "Il mio nome
Ciclope, vuoi? L'avrai: ma non frodarmi
tu del promesso a me dono ospitale.
Nessuno è il nome; me la madre e il padre
chiaman Nessuno, e tutti gli altri amici".
Ed ei con fiero cor: "L'ultimo ch'io
divorerò, sarà Nessuno. Questo
riceverai da me dono ospitale".”*

(Omero – L'Odissea – libro 9, vv. 468-480)

*“Una delle principali cause della caduta dell'impero Romano fu che, privi dello zero,
non avevano un modo per indicare la corretta terminazione dei loro programmi C.”*

(Robert Firth)



Indice generale

0	Introduzione: parlare del nulla.....	3
1	Lo zero in matematica.....	3
1.0	Le origini degli errori.....	3
1.1	Lo zero e gli errori comuni.....	3
2	La storia dello zero.....	4
2.0	I babilonesi.....	5
2.1	I maya.....	5
2.2	Gli indiani.....	6
2.3	Gli arabi.....	7
2.4	I romani (e gli italiani).....	8
3	Lo zero e l'informatica.....	10
3.0	Gli array.....	10
3.1	/dev/null e /dev/zero.....	11
4	Lo zero, il nulla e la filosofia.....	11
4.0	Il pensiero greco.....	11
4.1	Il pensiero Cristiano: Dio e la creazione dal nulla.....	11
4.2	Il divenire di Hegel.....	12
4.3	Il nulla nei filosofi esistenzialisti.....	12
5	Il nulla e l'arte.....	13
5.0	Nella letteratura.....	13
5.1	Nella pittura.....	14
5.2	Nella musica.....	15
5.3	Nella censura (ovvero, nell'assenza di arte).....	15
6	Lo zero e l'infinito.....	16
6.0	Dialogo tra Zero e Infinito.....	16
7	Bibliografia.....	18
7.0	La Storia dei numeri e della matematica.....	18
7.1	Letteratura.....	18
7.2	Filosofia.....	18
7.3	altro.....	19

0 Introduzione: parlare del nulla

Interrogarsi sul senso del nulla, sul suo significato matematico e filosofico, può sembrare inutile e banale, ma come si vedrà porta con se riflessioni e congetture interessanti e tutt'altro che scontate.

In questa tesina, scritta da Marco Cornolti per il corso di Informatica e Cultura (prof. Romani) del CdL in Informatica dell'Università di Pisa, si darà una panoramica dei vari aspetti di questo concetto, che pur essendo così astratto, ha una forte applicazione quotidiana e un importante senso filosofico.

Cercando di dare più spunti possibile per stimolare la curiosità, si parlerà di come le varie declinazioni del nulla si presentano nei diversi campi di studio (matematica, informatica, storia, filosofia, arte), dando un senso alle parole zero, nulla, assenza, inesistenza, vuoto, silenzio, pausa.

1 Lo zero in matematica

In matematica, lo zero è molto diverso da tutti gli altri numeri. Se per noi la sua esistenza può essere data per scontata, è solo perché grandi menti del passato sono giunte alla conclusione che la rappresentazione dell'elemento nullo avesse senso e fosse di qualche utilità.

Lo zero è un numero che ricorre frequentemente nelle applicazioni scientifiche avanzate, ma basta poco per rendersi conto che ha un impatto importante anche sulla vita di tutti i giorni, visto che interviene in moltissime situazioni quotidiane.

Esistono infatti alcuni problemi per i quali creiamo dei modelli di calcolo semplici, che apparentemente sono ovvi e giusti, ma danno una soluzione sbagliata, che differisce da quella giusta in genere di 1. L'errore spesso è di non prendere in considerazione lo "zeresimo" elemento.

1.0 Le origini degli errori

È provato che il linguaggio naturale usato crei nella nostra mente degli schemi di pensiero che influenzano anche ambiti lontani dal linguaggio, come la soluzione dei problemi matematici. Di questo si ha esperienza ad esempio nei linguaggi di programmazione: se scrivere un server chat in C è un'impresa che necessita una buona preparazione e mesi di testing, scrivere il medesimo programma con un linguaggio ad alto livello come Java risulta incredibilmente più veloce e più semplice. Questo avviene perché alcuni linguaggi (siano essi linguaggi di programmazione o linguaggi naturali) offrono delle strutture logiche particolari che spingono i ragionamenti in determinate direzioni.

Chi, come noi italiani, intreccia un linguaggio naturale post-latino con pensieri matematici che hanno a che fare con lo zero, incontra facilmente un problema provocato dall'eredità che ci hanno lasciato gli antenati dell'impero romano, che non conoscevano lo zero.

Considerare 1 come primo numero conduce infatti ad errori logici, e per correggere questi errori è spesso necessario creare un modello di calcolo diverso e più complesso.

1.1 Lo zero e gli errori comuni

Incontrare questi errori è facile, e per farli notare si possono usare degli esperimenti divertenti. Basta provare a chiedere ad una persona (indipendentemente dal suo

livello di studio) di contare ad alta voce 3 secondi battendo le mani ogni secondo.

La cavia batterà le mani 3 volte, e conterà ad alta voce: “uno, due, tre”, convinto di aver contato 3 secondi. Tuttavia tra l'istante in cui si battono le mani la prima volta (e la cavia esclama “uno”) e l'istante in cui si battono per l'ultima volta (e la cavia esclama “tre”) sono passati non 3 secondi ma solo 2 (vedi Illustrazione 1).

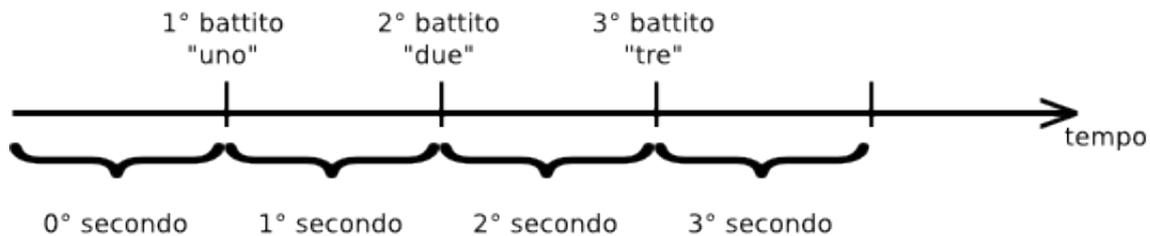


Illustrazione 1: Esempio di errore nel conteggio dei secondi: linea temporale

L'errore nel modello, in questo caso, è stato di cominciare a contare da 1. Un modello funzionante per quantificare i secondi dovrebbe infatti cominciare a contare da 0 (nell'esempio la cavia dovrebbe dire: “zero, uno, due, tre”), oppure aspettare che termini l'ultimo secondo, e quindi nell'esempio contare fino a 4, cosa ancora meno intuitiva.

In realtà in questo caso la matematica ci viene incontro con lo strumento della sottrazione. Se proviamo a sottrarre l'ultimo elemento raggiunto al primo, troviamo subito l'errore. Infatti $3-1=2$, mentre $3-0=3$.

Prendere 1 come primo elemento torna male anche nel conteggio dei secoli. Secondo logica, dato che un secolo dura 100 anni, il numero identificativo del secolo dovrebbe essere legato alla terza e quarta cifra (a partire da destra) degli anni corrispondenti al secolo. Invece come sappiamo il primo secolo è quello che va dall'anno 0 al 99 e il ventesimo secolo è quello che va dal 1900 al 1999, anni che però non contengono il 20. Anche in questo caso, se si partisse a contare dallo zeresimo secolo, tornerebbe tutto.

Associare il numero 1 come primo elemento è per noi naturale, visto che i latini, non conoscendo lo zero, associavano il termine *primus* al numero romano 1. Ma tutti gli errori finora discussi si vanificherebbero se il termine *primo* fosse invece associato al numero 0.

Del resto l'etimologia di *primus* è indipendente dal numero 1, e proviene dal sanscrito *paramàs*, ovvero “l'entità che precede tutte le altre”, mentre *secundus* deriva dal latino *sequi* (*sequire*), è infatti l'entità che succede il primo. L'associazione tra numeri cardinali e ordinali comincia solo da *tertium* (*terzo*), evidentemente legato al numero 3.

Dunque sarebbe più corretto e indurrebbe meno errori logici, nella numerazione cardinale, associare il termine *primo* o *zeresimo* al numero 0 e *secondo* o *unesimo* al numero 1, per poi proseguire con gli altri numeri: *duesimo* al 2, *terzo* al 3, *quarto* al 4, e così via.

2 La storia dello zero

Dopo aver visto i problemi dovuti all'esclusione dello zero nell'associazione dei numeri ordinali a quelli cardinali, si passerà ad esporre il percorso culturale globale che ha portato nei millenni alla nascita dello zero, prima come cifra e poi come numero, che potrà aiutare a comprenderne il significato. In particolare è interessante il fatto che diverse civiltà senza alcun contatto tra loro abbiano sviluppato indipendentemente

questo strumento matematico, come se la scoperta dello zero fosse un passaggio obbligato nell'evoluzione dell'umanità.

2.0 I babilonesi

I babilonesi sono una popolazione vissuta tra il 23° e il 6° secolo a.C. sulle rive del Tigri, nell'attuale Iraq. Essendo posti in un territorio ricco di risorse e strategicamente importante per il commercio, sono sempre stati soggetti a guerre e invasioni. Ma il continuo conflitto e la dominazione delle altre civiltà non hanno impedito loro di dedicarsi alla ricerca matematica, il cui sviluppo pare sorprendente per l'epoca.

La numerazione babilonese è in base 60 (da cui derivano le attuali misure degli angoli, oltre che le frazioni delle ore in minuti e dei minuti in secondi), con un sistema posizionale. Per le cifre veniva usato un sistema a base dieci additivo, in cui le frecce verso sinistra rappresentano le decine e i cunei verticali o orizzontali valgono 1 ognuno. Nell'illustrazione 2 vediamo la rappresentazione del numero 15, composta da una freccia verso sinistra di valore 10 e 5 cunei di valore 1 ciascuno.



Illustrazione 2: Il numero 15 nei babilonesi

I babilonesi conoscevano le frazioni, l'elevazione al quadrato e al cubo, il teorema di Pitagora e le basi della geometria tridimensionale. Sono state ritrovate delle tavole risalenti al 21° secolo a.C. in cui sono rappresentati problemi di geometria risolti e altre tavole che mostrano tabelle con i risultati di operazioni comuni già pronti, tra cui una che contiene il quadrato dei primi 59 numeri e il cubo dei primi 23.

I babilonesi hanno scoperto la cifra zero grazie al difetto di chiarezza che aveva il loro sistema posizionale. Nelle tavole più antiche infatti lo zero è indicato con uno spazio, notazione che induceva a errori: un numero la cui cifra centrale è 0 poteva essere letto come due numeri separati. Questa notazione è stata utilizzata per un migliaio di anni, ma ai tempi di Alessandro Magno è stata introdotta la cifra 0 rappresentata con due cunei obliqui, diversi da tutti gli altri, che ricordano lo spazio vuoto.

Nella Illustrazione 3 è rappresentato un ritaglio di una tavola proveniente da Uruk del tardo terzo secolo a.C.¹. Questa tavola mostra il primo ritrovamento dello zero (il secondo gruppo di segni) nella Storia. I segni rappresentano, nell'ordine, le cifre 1, 0 e 45, quindi il valore del numero è $1 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60^1 + 45 \cdot 60^0 = 3645$.



Illustrazione 3: Primo ritrovamento dello zero nei numeri babilonesi.

Nonostante i babilonesi conoscessero la cifra zero, introdotta per risolvere questi problemi di notazione, tuttavia non conoscevano l'utilizzo del numero zero per indicare una quantità nulla.

2.1 I maya

La civiltà dei maya ha raggiunto il suo massimo splendore tra il 250 e il 925 d.C., periodo in cui occupava in sud america il territorio attualmente coperto da Honduras, Guatemala e dal sud del Messico. Pur non avendo alcun contatto culturale con la civiltà babilonese, anche i maya si sono posti il problema dello zero, ma è particolarmente interessante la motivazione che li ha portati a questa ricerca, che come si vedrà è legata alla loro religione.

Il sistema di numerazione maya non ha basi uniformi, essendo legato al calendario solare. Per contare i giorni veniva usata una base 20 chiamata *K'in*, quindi i mesi dei maya duravano 20 giorni. La base con cui si contavano i mesi si chiama *Winal*. Dato

¹ Il codice della stele è AO 6484, lato B. Il reperto è custodito al Louvre di Parigi.

che sarebbe stato impossibile quantificare gli anni contando anche i mesi in base 20, visto che un anno "pieno" sarebbe durato 400 giorni, la seconda base (*Winal*) vale 18. In questo modo, contando progressivamente i mesi, aumenta l'anno dopo approssimativamente 18 mesi (360 giorni). Tutte le altre basi valgono 20. Quindi 1 *tun* (circa un anno) vale 18 *winal* (mesi), 1 *K'atun* vale 20 *tun*, un *B'ak'tun* vale 400 *tun*, e così via.

I maya avevano altre quattro basi, chiamate *Piktun*, *Kalabtun*, *K'inchiltun*, e *Alautun*, tutte di valore 20. I 7 cicli non permettono di rappresentare numeri fino all'infinito (anche l'*Alautun* è una base 20 e non esiste una base superiore) ma possono comunque raggiungere un valore molto alto, esattamente 460.800.000.000 (svariati ordini di grandezza in più rispetto agli interi usati dai computer a 32 bit, che possono rappresentare valori fino a circa 4 miliardi).

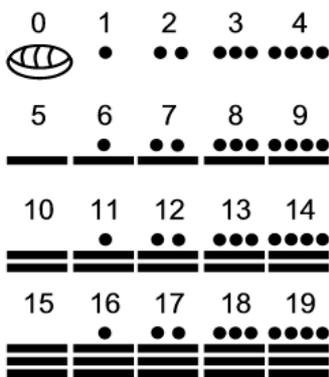


Illustrazione 5: I numeri maya da 1 a 19

Come mostrato nell'illustrazione 5, per la rappresentazione delle cifre i Maya usavano, in modo simile ai babilonesi, un sistema additivo con delle barre orizzontali di valore 5 e dei punti di valore 1.

Per quanto riguarda l'invenzione dello zero, è utile sapere che i maya ritenevano che ogni dio fosse responsabile per uno di questi cicli (le basi), e che le date venivano rappresentate raffigurando questi dèi che trasportano i numeri (vedi Illustrazione 4). I saggi maya incontrarono dunque la difficoltà di dover disegnare, per certe date, alcuni dèi che non trasportavano alcunché. Per

paura di offenderli e di incorrere nella loro ira, hanno pensato di far trasportare loro un oggetto che non valesse niente, a forma di conchiglia vuota (vedi Illustrazione 5).

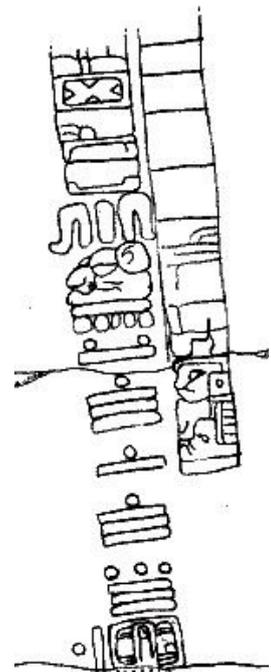


Illustrazione 4: La stele C ritrovata a Tres Zapotes. Rappresenta il giorno 7.16.6.16.18 (3 Settembre del 32 a.C)

2.2 Gli indiani

Lo zero in matematica inteso non solo come cifra ma anche come numero fa la sua comparsa diversi secoli più tardi in India, e la sua scoperta è stata sicuramente aiutata dalla presenza del concetto di nulla nella filosofia Indu. Nell'induismo infatti il raggiungimento del Nirvana consiste nell'ottenere la salvezza fondendosi per l'eternità col nulla. Gli indiani rappresentavano lo zero con un punto (lo stesso simbolo che utilizzavano per indicare un'incognita) e lo chiamavano in tre modi: *Pujyam* (che significa anche "divino"), *Shunyam* e *Bindu*.

La prima descrizione formale dello zero come numero è stata proposta da Brahmagupta, un geniale astronomo e matematico nato nel 598 d.C. nella città di Ujjain, nell'ovest dell'India.

Brahmagupta formulò il trattato *Brahma-sputa-siddhanta* (628 d.C.), che tradotto significa "l'apertura dell'universo", in cui descrive il significato del numero zero, oltre a introdurre i numeri negativi e fornire il metodo per risolvere alcuni tipi di

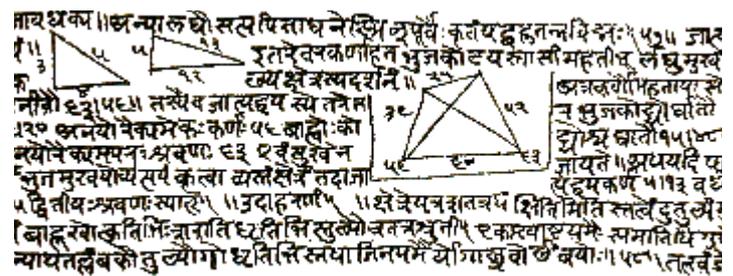


Illustrazione 6: Uno scritto originale di Brahmagupta

equazioni. I trattati sono completamente scritti in versi.

Per i numeri negativi e per lo zero, lo scienziato descrive il funzionamento di alcune operazioni aritmetiche con delle definizioni:

- la somma di zero con un numero negativo è negativa [$0+(-6)<0$], la somma di zero con un numero positivo è positiva [$0+6>0$], la somma di zero e zero vale 0 [$0+0=0$]
- un numero negativo sottratto a 0 è positivo [$0-(-6)=6$] e viceversa [$0-6=-6$]
- zero sottratto ad un numero negativo è negativo [$-6-0<0$], zero sottratto ad un numero positivo è positivo [$6-0>0$], zero sottratto a zero è zero [$0-0=0$]
- un numero moltiplicato per zero vale 0 [$6*0=0$]

Il trattato affronta anche i problemi che sorgono con la divisione per zero, ma in questo campo le definizioni sono approssimative.

- un numero, quando diviso per zero, è una frazione con lo zero al denominatore [$\frac{6}{0}=\frac{x}{0}$]
- zero diviso per un numero resta zero [$\frac{0}{x}=0$], anche se $x=0$ [$\frac{0}{0}=0$]

Circa 500 anni dopo un altro matematico indiano di nome Bhaskara ha approfondito ed esteso gli studi di Brahmagupta, aggiungendo alla teoria i risultati di alcune operazioni, come $0^2=0$ e $\sqrt[2]{0}=0$.

Bhaskara ha anche cercato di ridefinire il comportamento dello zero nella divisione, portando dei progressi significativi ma ancora pieni di contraddizioni. Bhaskara afferma che:

Una quantità divisa per 0 diventa una frazione il cui denominatore è 0. Questa frazione rappresenta una quantità infinita. In questa quantità non vi è alterazione nel caso che altre quantità vengano immesse o estratte; così come non vi è cambiamento nell'infinito e immutabile Dio quando i mondi vengono creati o distrutti"

In altre parole, Bhaskara afferma che $\frac{n}{0}=\infty$, trattando però l'infinito come una quantità, e incorrendo nella seguente contraddizione:

$$\begin{aligned} n &\neq k \\ \frac{n}{0} &= \infty \Rightarrow n = 0 \cdot \infty \\ \frac{k}{0} &= \infty \Rightarrow k = 0 \cdot \infty \\ \Rightarrow n &= 0 \cdot \infty = k \Rightarrow k = n \end{aligned}$$

La teoria dei limiti, necessaria per dare una spiegazione all'operazione di divisione per 0, verrà introdotta solo decine di secoli dopo.

2.3 Gli arabi

Già dal VII secolo d.C., durante la fondazione dell'Islam, la matematica araba ha cominciato a svilupparsi, soprattutto nelle regioni dei moderni Iraq e Iran. Sebbene il centro dell'attività culturale fosse Baghdad e il dominio culturale fosse arabo-islamico,

i contributi sono giunti anche da decine di matematici provenienti da diversi paesi, culture e religioni. Fino al 1600 la matematica araba ha dato un grande contributo alla scoperta dell'algebra e al progresso dell'aritmetica, della geometria e della teoria del calcolo.

Il trattato sullo zero e i numeri negativi di Brahmagupta venne tradotto col nome di *Kitab arzij al-sind hind* ("Sul sistema indiano"), abbreviato solo *Sind Hind*, ed ha costituito la base di riferimento per molti dei matematici arabi permettendo la diffusione dello zero nella matematica araba già sviluppata.

Tra i matematici arabi più prestigiosi spicca il nome di Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi (780-850), che scrisse 6 importanti trattati di algebra, geografia ed astronomia spesso basati sul *Sind Hind*. Uno di questi, "Sul calcolo coi numeri indiani" (825), diede un importante contributo alla diffusione del sistema di numerazione decimale e dello zero come numero. Al-Khwarizmi gettò anche le basi dell'algebra nel suo libro "*Al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa'l-muqabala*", in italiano "Compendio sul calcolo tramite compensazione e bilanciamento" (830), nel quale illustrò un metodo per risolvere le equazioni quadratiche riconducendosi ad alcune forme canoniche.

Un altro matematico siriano, Abu'l-Hasan al-Uqlidisi, nel 952 ha esteso il sistema posizionale indiano includendo la separazione decimale per le frazioni, definendo $ab.cd = a \cdot 10^1 + b \cdot 10^0 + c \cdot 10^{-1} + d \cdot 10^{-2}$ con a, b, c, d cifre.

Dato che, come si è visto, gli arabi hanno avuto il merito di diffondere il sistema indiano su larga scala, comunemente si attribuisce loro la scoperta del sistema posizionale e delle cifre, compreso lo zero, in realtà scoperte dagli indiani. Proprio perchè gli arabi hanno diffuso il sistema, alla loro lingua è legata l'etimologia di alcune parole. Ad esempio, la parola *cifra*, in seguito ad un allargamento semantico, deriva dall'arabo *zifer* (zero), così come anche la parola *zero* proviene dallo stesso termine arabo *zifer*. *Algebra* deriva invece dall'arabo *Al-jabr* (calcolo).

2.4 I romani (e gli italiani)

I numeri romani, al giorno d'oggi utilizzati solo per indicare cifre cardinali di valore basso, nell'antichità è stato usato su larga scala nell'Impero Romano e nelle province conquistate. Come sappiamo, il sistema romano non è posizionale ma additivo, infatti, per calcolare il valore di un numero, il valore delle cifre non viene moltiplicato ma sommato, nel caso che la cifra sia a destra rispetto a quella di valore più alto, o sottratto nel caso che sia a sinistra.

Le cifre, da I=1 a M=1000, hanno il valore quadrato se rappresentate con una barra sovrastante, ma possono rappresentare agilmente solo un insieme ristretto di numeri. infatti se per rappresentare un milione di volte l'unità esiste il simbolo \bar{M} , per rappresentare 1000 volte il milione (ovvero il miliardo) l'unico modo è di scrivere 1000 cifre \bar{M} . Più formalmente, dove n è il numero da rappresentare e h il numero di cifre necessarie a rappresentarlo, con $n \rightarrow \infty$, per i sistemi posizionali $h = O(\log(n))$, mentre per i



Illustrazione 7: Una pagina del trattato "Sul calcolo tramite compensazione e bilanciamento" (830), che gettò le basi dell'algebra.



Illustrazione 8: Stemma della Seconda Legione Augusta (fac simile).

sistemi additivi $h=O(n)$.

I romani non conoscevano nemmeno i numeri negativi né il numero zero. Il sistema romano quindi è adatto per rappresentare cifre relativamente piccole, come i soldati di cui è composta una legione o il numero di barbari caduti in battaglia, ma difficilmente si presta ad elaborazioni matematiche sui grandi numeri. Inoltre, mentre i sistemi posizionali permettono facilmente le operazioni di base come somma e moltiplicazione, con il sistema romano soprattutto la moltiplicazione è molto più difficile.

La prima comparizione storica delle cifre indiane sul territorio europeo risale al Codice Vigilano (976), una raccolta di documenti storici e di testi antichi redatto da tre monaci del monastero di Albelda (la città fulcro dell'attività scientifica del regno di Pamplona). Nell'illustrazione 9 è riportata una parte di questo manoscritto. Come vediamo tra le cifre riportate manca lo zero. A quanto pare quindi i monaci erano a conoscenza solo delle cifre da 1 a 9, mentre ignoravano la cifra zero e molto probabilmente anche il numero zero.

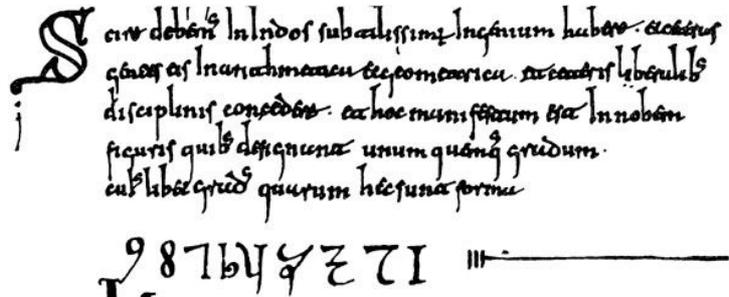


Illustrazione 9: La prima comparsa del sistema arabo in Europa, nel Codex Vigilanus (976).

Il primo a portare a conoscenza del mondo occidentale il sistema posizionale indiano completo, il numero zero e le tecniche di calcolo fu il matematico Leonardo Fibonacci (1170 - 1250), pisano, che basandosi sul *Sind Hind* e sugli scritti dei matematici arabi scrisse il *Liber Abaci* (1202). In questo libro non solo viene presentato il sistema di numerazione indiano, ma anche la sua efficienza nel calcolo ed i metodi per eseguire le operazioni come il metodo di Lattice per le moltiplicazioni e la divisione egiziana.

Ecco come Fibonacci presenta le cifre indiane all'inizio del *Liber Abaci*.

Novem figure indorum he sunt 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Cum his itaque novem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabice zephirum appellatur, scribitur quilibet numerus, ut inferius demonstratur.

(Leonardo Fibonacci – *Liber Abaci* – Capitulum I)

Tradotto: “Le nove figure delle Indie sono 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Con queste nove figure, e con il segno 0, che gli arabi chiamano *zephirum*, è possibile scrivere qualunque numero, come dimostrerò tra poco”.

Fibonacci non si limita a parlare dell'astratto, ma nel *Liber Abaci* descrive anche diversi campi di applicazione del nuovo sistema, come la contabilità per il commercio, la conversione delle unità di misura, il calcolo degli interessi ed altre applicazioni finanziarie. Tuttavia il sistema indiano rimane utilizzato solo dai matematici fino al XV secolo, per poi diffondersi tra la popolazione tramite la stampa.

Europee	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Arabe-indiane orientali (Persiane e Urdu)	•	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	
Devanagari (Hindi)	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	
Tamil		௦	௧	௨	௩	௪	௫	௬	௭	௮	௯

Illustrazione 10: Cifre del sistema decimale in diverse codifiche.

Ad oggi, il sistema di numerazione arabo-indiano è diffuso in tutto il pianeta. Infatti in tutto il mondo è usato il sistema posizionale in base 10. Tuttavia in alcuni paesi sono utilizzati dei caratteri diversi per indicare le cifre. Facendo riferimento all'Illustrazione 10, le cifre "Arabe-indiane orientali" sono attualmente usate nei paesi in cui si parla il Farsi, come Iran e Afghanistan, quelle Devanagari sono usate in India, mentre quelle Tamil sono usate in India e Sri Lanka. Analogamente, anche in Cina e in Giappone possono essere utilizzati gli ideogrammi come cifre, ma le cifre occidentali sono prevalenti.

3 Lo zero e l'informatica

3.0 Gli array

Una delle prime difficoltà che si incontrano nella programmazione è il fatto che gli array hanno 0, invece che 1, come indice del primo elemento.

Nel primo impatto che ha lo studente di Informatica con la programmazione Java, l'eccezione più frequentemente lanciata dalla Java Virtual Machine è la *ArrayOutOfBoundsException*, invocata quando il programma va a leggere degli elementi in un array in posizioni che non fanno parte dell'array. Il seguente è un tipico esempio di ciclo *for* sbagliato:

```
for (int i=1; i<=array.length; i++)
    System.out.println(array[i]);
```

Questo errore è causato, nell'esempio, dal problema della numerazione degli indici. Se l'obbiettivo è far scorrere tutto l'array lungo 3 al programma, in italiano spontaneamente pensiamo: "il programma deve stampare gli elementi dal primo al terzo", o meglio, "dal 1° al 3°". In realtà, come sappiamo, gli indici degli elementi degli array di k elementi cominciano da 0 e finiscono a $k-1$. L'eccezione è dunque sollevata quando si tenta di stampare l'elemento di indice 3 (visto che l'ultimo è il 2).

Problemi di convenzione, naturalmente, ma va anche detto che la numerazione degli elementi a partire da 0 porta a diverse semplificazioni del codice. Ad esempio, supponendo di avere un array di 364 elementi rappresentanti i giorni dell'anno, i giorni della trentesima settimana avranno come indice $((30-1)*7+0), \dots, ((30-1)*7+6)$. Da notare il fatto che sia l'indice della settimana (30) sia l'indice del giorno (0...6) sono diminuiti di 1 rispetto all'italiano. Se gli array cominciassero da 1, i 7 giorni della settimana avrebbero indici $((30-1)*7+1), \dots, ((30-1)*7+7)$, il che porterebbe ad una incongruenza logica causata dai due diversi approcci usati con le settimane e coi giorni, ovvero il fatto che sia diminuito di 1 l'indice delle settimane e non quello dei giorni.

Entrando più nel tecnico, e guardando l'implementazione degli array bidimensionali, vediamo che cominciare l'indicizzazione da 1 porterebbe a simili difficoltà nell'implementazione.

3.1 /dev/null e /dev/zero

Nei file system dei sistemi Unix i file non rappresentano soltanto documenti o eseguibili residenti sull'hard disk, ma anche altri oggetti più o meno astratti: pipe per la comunicazione tra processi, socket per la comunicazione con internet, periferiche o collegamenti ad altri file.

In particolare esiste un file che rappresenta il nulla, che si chiama */dev/null*, ed uno che rappresenta lo zero, */dev/zero*. Tutti i dati scritti in questi file speciali vengono

eliminati, mentre la lettura da questi file restituisce un End Of File nel caso di `/dev/null` e un byte di valore 0 nel caso di `/dev/zero`.

La presenza di questi file può sembrare inutile, ma ha invece un largo utilizzo. Ad esempio grazie alla redirectione degli stream, si può mandare l'output del programma (o parte di esso) nel nulla invece che stamparlo sullo schermo. Con il seguente comando bash si cancella il file `appunti.txt` nel caso che esista, senza stampare in alcun caso messaggi sullo schermo (normalmente stamperebbe un messaggio di errore nel caso che il file non esista):

```
rm appunti.txt &>/dev/null
```

`/dev/zero` può anche essere utilizzato, in quanto fonte inesauribile di zeri, per generare un file 'pulito' di dimensione determinata. In questo esempio viene creato un file di nome `bar.txt` di 1 Kb i cui bytes valgono tutti 0.

```
#!/bin/bash
dd if=/dev/zero of=bar.txt bs=1 count=1024
```

4 Lo zero, il nulla e la filosofia

Molte scuole di pensiero filosofico si sono interessate della definizione del nulla. Il problema è particolare perché se il compito della filosofia è spesso di trattare l'esistente, in questo caso si tenta di definire l'inesistente.

4.0 Il pensiero greco

Il filosofo greco Parmenide (5° secolo a.C.) identifica il nulla come il non-essere. Da questo nota che il nulla non esiste, perché se esistesse sarebbe qualcosa, e quindi negherebbe l'ipotesi, dato che *qualcosa* è il contrario del *nulla*.

Parmenide contrappone quindi l'essere assoluto al non-essere assoluto, e da questa riflessione deriva, come complementare, la verità dell'esistenza del tutto: il tutto esiste, ed è impossibilitato a non esistere, in quanto se una parte del tutto non esistesse, non farebbe parte del tutto ma del nulla.

Platone in seguito ha criticato la concezione del non-essere assoluto di Parmenide, riconoscendo come assoluto solo l'essere. Nel *Sofista*, Platone parla del non-essere relativo, visto che, nota Platone, la proprietà della non-esistenza può avere senso solo in seguito all'affermazione dell'esistenza, mentre non è vero il viceversa, ovvero che l'esistenza di un'entità ha senso solo se è affermata la sua non-esistenza. Possiamo dire che esiste una mela perché abbiamo avuto esperienza della sua esistenza, ma non possiamo definire l'esistenza di ciò che è inesistente. Quindi dall'esistenza si può derivare la non-esistenza mentre non si può fare il processo inverso.

4.1 Il pensiero Cristiano: Dio e la creazione dal nulla

Nel pensiero cristiano di Sant'Agostino (354-430), uno dei fondatori della Chiesa Cattolica, la finitezza delle creature è sintomo dalla loro derivazione dal nulla. Infatti, al momento della creazione, le creature si collocano in uno spazio tra il nulla e Dio: ciò che di loro è perfetto ed eterno proviene da Dio, ciò che di loro è imperfetto e limitato proviene dal fatto di essere create dal nulla.

Il filosofo tedesco luterano Jakob Böhme (1575-1624) prosegue la riflessione sul rapporto tra nulla e Dio. In particolare il suo pensiero si sofferma sul mistero della creazione. Secondo la religione cristiana, infatti, Dio ha creato l'universo dal nulla, e prima della creazione non esisteva alcunché, neanche Dio. Dunque il dubbio è su

come si sia potuto creare Dio, se prima non esisteva alcunché. Al proposito Böhme afferma che:

"Il Nulla è dio, e dio ha fatto tutte le cose dal Nulla, ed è esso stesso il Nulla. Ma questo Nulla è un Nulla «strano». Non è affatto un Nulla. E allora? Dio stesso è il «vedere e sentire del Nulla»... ed è chiamato «Un Nulla» (pur essendo Dio stesso) perché è incomprendibile e ineffabile".

4.2 Il divenire di Hegel

Hegel (1770-1831), uno dei più grandi filosofi della storia contemporanea, ha proposto una teoria secondo la quale l'esistente ed il non-esistente sono egualmente indeterminati come concetti assoluti e si contrappongono all'essere determinato, che è la caratterizzazione dell'essere, in cui influisce anche il non-essere.

Nella teoria assume un'importanza particolare il *divenire*, ovvero il passaggio dal non-essere all'essere determinato. Durante il divenire l'esistente ed il non-esistente sono la stessa cosa, visto che il divenire è un passaggio continuo dal non-essere all'essere. Ponendo la vita di un oggetto in una linea temporale, definiamo come divenire il mutamento dell'oggetto da un istante a quello successivo. Nell'istante i l'oggetto non è ancora ciò che sarà nell'istante $i+1$, e nell'istante $i+1$ non è ciò che sarà nell'istante $i+2$. Per questo il divenire è un continuo passaggio dal non-esistente all'esistente, e poi di nuovo al non-esistente con la progressione del punto di riferimento insieme col tempo.

4.3 Il nulla nei filosofi esistenzialisti

Un'importante corrente filosofica è quella del movimento esistenzialista, sviluppatasi tra il XIX ed il XX secolo, che poneva al centro del proprio interesse le domande: cosa è, cosa determina e da dove nasce l'essere?

La riflessione sull'esistente porta naturalmente ad analizzare anche ciò che è diverso dall'esistente.

Il filosofo danese Kierkegaard (1813-1855), considerato il padre dell'esistenzialismo, collega i concetti di *inesistente*, *angoscia* e *morte*. La vita è la possibilità da parte dell'essere umano di compiere scelte che determinano il proprio futuro, e questa possibilità porta all'angoscia, frutto dell'incertezza di queste scelte. La morte è, al contrario, l'inesistenza di scelte che è possibile compiere. Per raggiungere questo stato non è necessario morire biologicamente: anche durante la vita biologica esiste uno stato, detto *disperazione*, nel quale l'essere umano si rende conto dell'inesistenza di scelte operabili. Lo stato della disperazione fa sperimentare all'uomo la morte, pur essendo in realtà solo una morte intellettuale.

Henri Bergson (1859-1941), filosofo francese, nel suo saggio "L'evoluzione creatrice" (1907), afferma che il nulla come concezione assoluta è insensato. Invece il nulla relativo, concetto molto più quotidiano, fa parte del campo della psicologia, e descrive la mancanza personale di qualcosa, la delusione di un'aspettativa. Ciò che comunemente scambiamo per il niente assoluto, è in realtà semplicemente un dominio di oggetti a cui non siamo attualmente interessati. Ad ogni modo, questa aspettativa nasce logicamente dopo rispetto all'esistenza, essendo il desiderio di ciò che si conosce ma non si ha.

5 Il nulla e l'arte

5.0 Nella letteratura

Il concetto del nulla, prima di essere diffuso nella sua versione matematica, era già presente nella cultura comune. Il più famoso e antico testo che ne fa uso è l'Odissea, la grandiosa opera attribuita al poeta greco Omero, scritta nel 9° secolo a.C.².

L'Odissea parla delle avventure di Ulisse dopo la caduta di Troia e del suo interminabile viaggio lungo la strada di casa. Contiene al suo interno, oltre ad episodi che ancora stimolano la fantasia a migliaia di anni di distanza, dei profondi spunti di riflessione sull'avarizia, l'astuzia, l'amore, l'immortalità e anche sull'esistenza dell'uomo. Intorno a quest'ultimo argomento ruota un episodio dell'Odissea, nel quale Ulisse ed i suoi compagni sono stati catturati dal ciclope Polifemo, intenzionato a mangiarli tutti uno alla volta.

Grazie alla sua astuzia, Ulisse escogita un piano per fuggire dalla grotta e ritrovare la libertà. Fa ubriacare Polifemo, al quale aveva celato il suo nome, e lo convince di chiamarsi Nessuno. Quindi con l'aiuto dei suoi compagni acceca l'unico occhio del ciclope, e fugge via. A questo punto Polifemo, furioso, invoca a squarcia gola l'aiuto degli altri ciclopi che vivono nell'isola, ma alla loro richiesta su chi lo abbia ferito, lui risponde "Nessuno", così i ciclopi credono si tratti di uno scherzo e non considerano le sue richieste.

Il nulla è usato nelle loro composizioni anche da scrittori successivi. Leopardi (1798-1837), nel suo pessimismo cosmico, denuncia la nullità dell'uomo rispetto all'universo, e invita per questo ad abbandonare il proprio orgoglio, le proprie speranze, le proprie aspirazioni. Rappresentativi sono i seguenti versi estratti del componimento "Ad Angelo Mai":

*Oh te beato,
A cui fu vita il pianto! A noi le fasce
Cinse il fastidio; a noi presso la culla
Immoto siede, e su la tomba, il nulla.
(Giacomo Leopardi – Ad Angelo Mai)*

Leopardi si interroga ampiamente anche su cosa ci attende dopo la morte, trovando soluzione al dilemma, ancora una volta, nel nulla:

*Tutto è nulla al mondo, anche la mia disperazione, della quale anche savio,
ma più tranquillo, ed io stesso certamente in un'ora più quieta conoscerò, la
vanità e l'irragionevolezza e l'immaginario. Misero me, è vano, è un nulla
questo mio dolore, che in un certo tempo passerà e s'annullerà, lasciandomi
in un vuoto, e in un'indolenza che mi farà incapace anche di dolermi.
(Giacomo Leopardi – Zibaldone)*

Il nulla è metaforizzato da Samuel Beckett (1906-1989) nella commedia filosofica "Waiting for Godot" (1952), caposaldo del teatro dell'assurdo. Nello spettacolo i personaggi restano in eterna attesa di un fantomatico signore, Godot, che, come si intuisce dai loro dialoghi, porterà loro una svolta nella vita, ma che in tutto lo spettacolo non si presenterà mai, inviando solo messaggi tramite un ragazzino che invita ad aspettare ancora Godot. Tutto lo spettacolo ruota intorno all'attesa di questo signore da parte dei due protagonisti, Didi e Gogo, che durante l'attesa soffrono le intemperie della vita quotidiana. Hanno freddo, fame, sono poveri e litigano

² la data di creazione dell'opera è argomento di dibattito degli storici, così come la stessa esistenza del poeta Omero

continuamente, senza però avere la forza di separarsi, e aggrappati alla speranza che un giorno arrivi Godot.

Il nulla è presente anche nel ciclo di romanzi fantastici "La Storia Infinita" di Michael Ende (1929-1989), che raccontano la storia di Atreiu e Bastian, due ragazzi lanciati nell'impresa di salvare il regno di Fantàsia dal Nulla, che nel film non è mai rappresentato nettamente. Il Nulla è un'entità che avanza costantemente e inghiottisce paesaggi ed esseri viventi. In questo modo diventa sempre più forte, alimentandosi della mancanza di fantasia e di speranza degli uomini. Tutti i personaggi della storia sono attratti dal Nulla, e in sua presenza sentono l'istinto irrefrenabile di gettarsi nel vuoto e scomparire. Solo con una grande forza di volontà si riesce a resistere alla tentazione e fuggire. Il Nulla di Ende rappresenta la depressione dell'uomo: un facile e lusinghiero rifugio dai problemi che però porta ad un bene falso e alla perdita della possibilità di vivere in pieno la propria vita.

Se molti scrittori hanno affrontato il tema del nulla, altri hanno utilizzato il nulla come forma espressiva. Lo scrittore irlandese Laurence Sterne (1713-1768) ha scritto *La vita e le opinioni di Tristram Shandy*, un romanzo pubblicato in nove volumi dal 1759 al 1767. Il romanzo non presenta una trama o quasi, e la storia si svolge nell'arco di un giorno. I nove volumi si prendono gioco delle convenzioni letterarie dell'epoca, sono infatti caratterizzati da pagine completamente bianche o completamente nere. Alcuni capitoli sono mancanti, altri sono composti da un'unica frase. Sono presenti numerosi appelli al lettore e commenti dell'autore sullo stesso testo scritto. Il romanzo è lasciato incompiuto e si ferma alla giovinezza del personaggio principale, del quale però il libro parla pochissimo, essendo composto quasi completamente di digressioni sugli altri componenti della famiglia.

5.1 Nella pittura

Anche la pittura contemporanea si è fatta carico di rappresentare il nulla. Il pittore Lucio Fontana (1899-1968), italiano di origini argentine, ha fondato il movimento spazialista, che si poneva come obiettivo di esaltare la tridimensionalità della tela, e fondato la scuola Altamira, da cui è ispirato il Manifesto Blanco. In questo manifesto sono poste le basi per una nuova forma d'arte, per la quale è necessario "*un cambio nell'essenza e nella forma. È necessario il superamento della pittura, della scultura, della poesia e della musica. È necessaria un'arte che vada più d'accordo con le esigenze dello spirito nuovo*". Nella fase spazialista, Fontana creava opere d'arte incidendo lunghi tagli nella tela bianca. Le sue opere sono espliciti riferimenti al nulla e all'infinito, rappresentati con l'assenza di disegni nelle tele monocromatiche e con gli squarci nelle tele, che rappresentano l'assenza di materia.

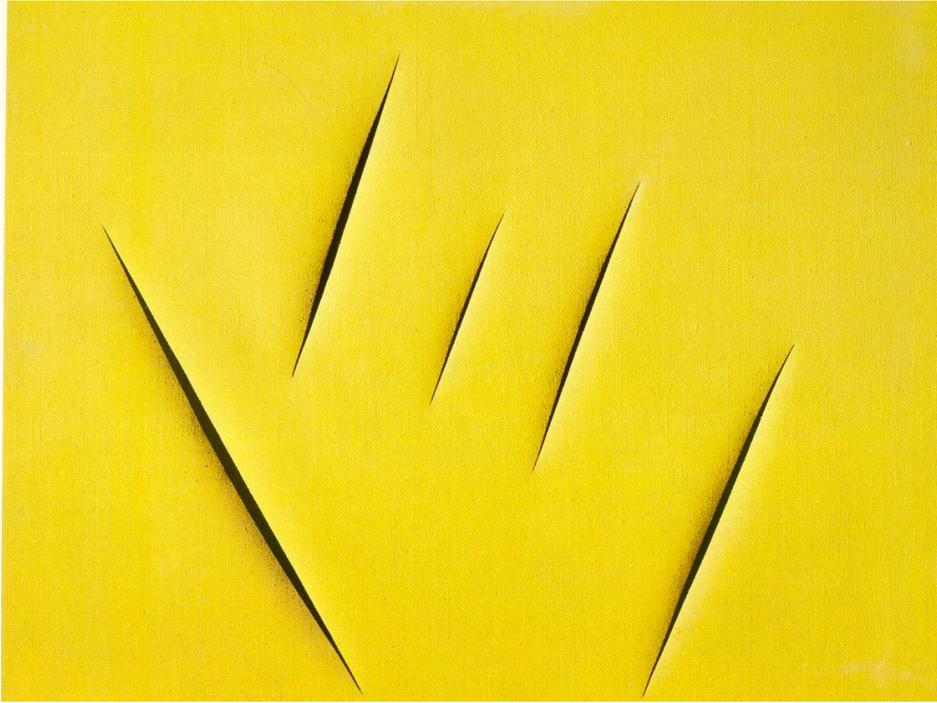


Illustrazione 11: Lucio Fontana, *Concetto spaziale*, 1959, 100 x 125 cm. Galleria d'Arte del Naviglio, Milano

5.2 Nella musica

Un brano dei Pink Floyd, *Empty Spaces*, propone nei suoi versi il tema degli spazi vuoti, in questo caso spazi temporali. La canzone fa parte del concept album "The Wall" (1979), forse la loro più grande creazione artistica e sicuramente la più conosciuta, che percorre un viaggio introspettivo e autobiografico nella vita dell'autore Roger Waters.

*What shall we use to fill the empty spaces,
where we used to talk?
How shall I fill the final places?
How shall I complete the wall?
(Empty Spaces – The Wall – Pink Floyd)*

La canzone parla del difficile rapporto con la moglie (lo si capisce solo ascoltando le tracce successive) e dei loro dialoghi, un tempo naturali e adesso pieni di vuoti impossibili da riempire. Nella breve canzone, l'autore si chiede ironicamente cosa utilizzare per riempire gli spazi vuoti nei loro dialoghi. Infine si chiede come riempire gli ultimi spazi per completare il muro, metafora dell'isolamento auto-protettivo che l'autore si è costruito per tutta la vita ed è riuscito a superare solo dopo una grave depressione.

Oltre alle canzoni che parlano del nulla, in forma più astratta il nulla può essere rappresentato dall'assenza di suoni. Il compositore John Milton Cage (1912-1992), uno dei protagonisti dell'avanguardia musicale, ha scritto una composizione, *4'33"*, fatta di un'unica pausa lunga 4 minuti e 33 secondi, ovvero 273 secondi, un richiamo alla temperatura dello zero assoluto.

5.3 Nella censura (ovvero, nell'assenza di arte)

L'assenza di parole come mezzo espressivo è stato scelto provocatoriamente dall'attrice satirica italiana Sabina Guzzanti, che nel 2003 ha condotto il programma televisivo *Raiot*, censurato dopo la prima puntata perché non gradito al governo Berlusconi, e su cui pende un risarcimento di danni da 10 milioni di euro. In seguito alla censura in RAI, la Guzzanti si è dedicata ad una serie di spettacoli teatrali, tra cui *Reperto Raiot*. Nella prima scena di questo spettacolo, ambientata nel futuro, un alieno racconta la storia di come si è cancellata la libertà di informazione in Italia. Dopo 17 minuti di spettacolo, la Guzzanti ha salutato il pubblico e sul telone da proiezione è comparsa la scritta "Fine". Si sono spente le luci e i tecnici sono saliti sul palco per smontare l'impianto. Dopo ben 7 minuti di silenzio la Guzzanti è tornata sul palco per invitare il pubblico a tornare a casa, dichiarando in un monologo di non avere più parole perché sono tutte state uccise da una mania di banalità dilagante in Italia, e di essersi auto-censurata per evitare ulteriori denunce. In questo modo ha cominciato di fatto lo spettacolo.

Quindi il silenzio può essere anche un modo di parlare, scelto da chi non ha altri metodi per esprimersi o decide che un momento di silenzio può essere più utile rispetto ad una presa di parola. Ha scelto questo metodo l'EZLN (Esercito Zapatista di Liberazione Nazionale), un movimento che opera in Chiapas, uno stato nel sud-est messicano, e reclama dal governo federale Messicano una maggiore dignità per il suo popolo indigeno, da sempre il più povero e sfruttato del Messico. Il 1° gennaio 1994 l'EZLN ha dato via ad un'insurrezione ed ha preso il controllo della quasi totalità del Chiapas fondando dei municipi autonomi.

L'EZLN ha sempre dato una grande attenzione al linguaggio usato, e questo gli ha garantito una forte solidarietà internazionale che ha reso difficile e in parte arginato la repressione dell'esercito messicano.

Durante la prima fase dell'insurrezione, i siti internet ed i giornali messicani erano aggiornati quotidianamente con i comunicati dell'EZLN, ma in risposta alla posizione intransigente assunta dal governo messicano, invece di elaborare una strategia per prevalere sulla discussione, gli insorti hanno usato in diverse occasioni il silenzio come arma. Il silenzio aveva lo scopo di evidenziare l'inutilità del dialogo con le istituzioni nelle condizioni che si erano create. Durante questi silenzi sono state sospese tutte le prese di posizione pubbliche per fare in modo che l'unico ad avere la parola fosse il governo, così che tutti potessero rendersi conto della sua malafede.

La strategia ha effettivamente svelato all'opinione pubblica che il governo, nell'ostentare proclami di sicurezza e forza, nascondeva l'incapacità (o non-volontà) di risolvere la questione chapanea.

6 Lo zero e l'infinito

6.0 Dialogo tra Zero e Infinito

Zero: "Ciao infinito"

Infinito: "Qualcuno ha detto qualcosa?"

Zero: "Non prendermi in giro, mi hai sentito bene!"

Infinito: "Oh, Zero! Sei tu. Scusami tanto se non ho fatto caso alla tua presenza."

Zero: "Smettila. Ne abbiamo già parlato!"

Infinito: "Appunto, rimango della mia opinione: tu non esisti!"

Zero: "Vuoi litigare?"

Infinito: "Assolutamente no, ti dico solo quello che sostengono tutti gli altri numeri. Naturali, reali o irrazionali che siano!"

Zero: "Mentono. Io ci sono, eccomi qua. Lo sanno anche i bambini delle elementari, anche a loro vengo insegnato."

Infinito: "Ai bambini si insegna anche l'esistenza di Babbo Natale. Comunque, a me non sembra proprio che tu ci sia. Ma se vuoi te lo dimostro matematicamente. Qualsiasi cosa, quando la dividi a metà diventa più piccola. E tu? $0/2 = 0$ "

Zero: "Che assurdit ... Ci sono altre cose che dividendole per 2 restano uguali. Prova ad andare nello Spazio, prendi un po' di vuoto, dividilo a meta' e otterrai lo stesso vuoto che avevi all'inizio! Eppure nessuno si sognerebbe di dire che il vuoto non esiste!"

Infinito: "Io lo dico, che il vuoto non esiste!"

Zero: "E allora cosa c'  tra un pianeta e l'altro?"

Infinito: "Niente!"

Zero: "Allora, io sar  forse niente, ma lasciami dire qualcosa, e dato che non esisto non dovrete offenderti. Ci ho pensato molto, e sai che ti dico? Che secondo me neanche tu esisti."

Infinito: "Questa s  che e' bella. E' ovvio che io esisto. Io sono tutto!"

Zero: "Eppure anche tu, infinito, diviso per 2 resti infinito."

Infinito: "...A questo non avevo pensato."

Zero: "Te lo dico io, nessuno di noi due esiste. Siamo entrambi invenzioni, niente di concreto."

Infinito: "Parla per te, io sono qualcosa di ben definito."

Zero: "Ah s ? Ma se non sei uguale neanche a te stesso!"

Infinito: "Certo che sono uguale a me stesso!"

Zero: "Allora senti questa dimostrazione per assurdo, visto che ti piace tanto la matematica: $\text{Infinito}=\text{Infinito}$, ok?"

Infinito: "Certo."

Zero: " $\text{Infinito} + 1 = \text{Infinito}$, no?"

Infinito: "Ovvio: io sono il pi  grande! un misero 1 messo accanto a me scompare nel nulla."

Zero: "Ma se $\text{Infinito}=\text{Infinito}+1$, possiamo sottrarti da entrambi i membri dell'equazione. Rimane $0=1$."

Infinito: "Evidentemente   un problema dell'1."

Zero: "Non arrampicarti sugli specchi. Sostituendo 1 con qualunque altro numero funziona lo stesso."

Infinito: "Quindi... forse neanche io esisto?"

Zero: "Gi ... non esistiamo. O forse non siamo abbastanza intelligenti per capire la nostra esistenza."

Infinito: "Ma se nessuno di noi esiste, chi   che sta prendendo parte a questo dialogo?"

Zero: "Nessuno. Neanche questo dialogo esiste."

7 Bibliografia

7.0 La Storia dei numeri e della matematica

Pasquale Quaranta – *L'India e la scoperta dello zero*

<http://www.aula28.org/cultura/L%E2%80%99India%20e%20la%20scoperta%20dello%20zero.htm>

Piergiorgio Odifreddi – *La Repubblica – Sorpresa, la matematica non è una nostra invenzione*

<http://www.swif.uniba.it/lei/rassegna/000721.htm>

Donata Allegri – *Storia dei numeri*

<http://www.fralenuvol.com/albero/sapere/scienza/numeri.php>

Wikipedia - *Maya Calendar*

http://en.wikipedia.org/wiki/Maya_calendar

Wikipedia - *Babylonian mathematics*

http://en.wikipedia.org/wiki/Babylonian_mathematics

Wikipedia - *Indian mathematics*

http://en.wikipedia.org/wiki/Indian_mathematics

A History of Zero – J. J. O'Connor e E. F. Robertson

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Zero.html>

Wikipedia – *Codex Vigilanus*

http://en.wikipedia.org/wiki/Codex_Vigilanus

Wikipedia – *Hindu-Arabic numeral system*

http://en.wikipedia.org/wiki/Hindu-Arabic_numeral_system

Wikipedia – *List of Arab scientists and scholars*

http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Arab_scientists_and_scholars

Wikisource – *Liber Abaci* (testo completo del Liber Abaci originale in latino)

http://la.wikisource.org/wiki/Liber_abbaci

7.1 Letteratura

Omero – *L'Odissea* (traduzione di Ippolito Pindemonte)

<http://www.liberliber.it/biblioteca/h/homerus/odissea/html/testo.htm>

Wikipedia – *Omero*

<http://it.wikipedia.org/wiki/Omero>

Wikipedia – *Giacomo Leopardi*

http://it.wikipedia.org/wiki/Giacomo_Leopardi

Wikipedia – *Giacomo Leopardi (Opere)*

[http://it.wikipedia.org/wiki/Giacomo_Leopardi_\(opere\)](http://it.wikipedia.org/wiki/Giacomo_Leopardi_(opere))

Wikipedia – *Aspettando Godot*

http://it.wikipedia.org/wiki/Aspettando_Godot

7.2 Filosofia

Enciclopedia Garzanti di Filosofia – Voci: *nulla, Agostino, Hegel, Böhme*

EFG – ISBN: 88-11-50460-0

Nicola Abbagnano et al. – *Protagonisti e Testi della Filosofia*

Paravia – ISBN: 88-395-3314-1

7.3 altro

ECN.org – *Il silenzio dell'EZLN*

<http://www.ecn.org/molino/collettivo/informes/silenzioez.htm>

Wikipedia – *Lucio Fontana*

http://it.wikipedia.org/wiki/Lucio_Fontana