# Equivalenza e minimizzazione

**Problema**: due descrizioni di linguaggi regolari denotano lo stesso linguaggio?

- vedremo un algoritmo che permette di stabilire se due FA definiscono lo stesso linguaggio, sono equivalenti
- una conseguenza importante, è l'esistenza di un modo per minimizzare un automa, ovvero per trovare l'automa minimo (con il minor numero di stati) equivalente
- l'automa minimo è unico a meno di ridenominazione degli stati

# Stati equivalenti

Sia $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA, e $\{p, q\} \subseteq Q$. Definiamo

$$p \equiv q \Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(p, w) \in F \text{ se e solo se } \hat{\delta}(q, w) \in F$$

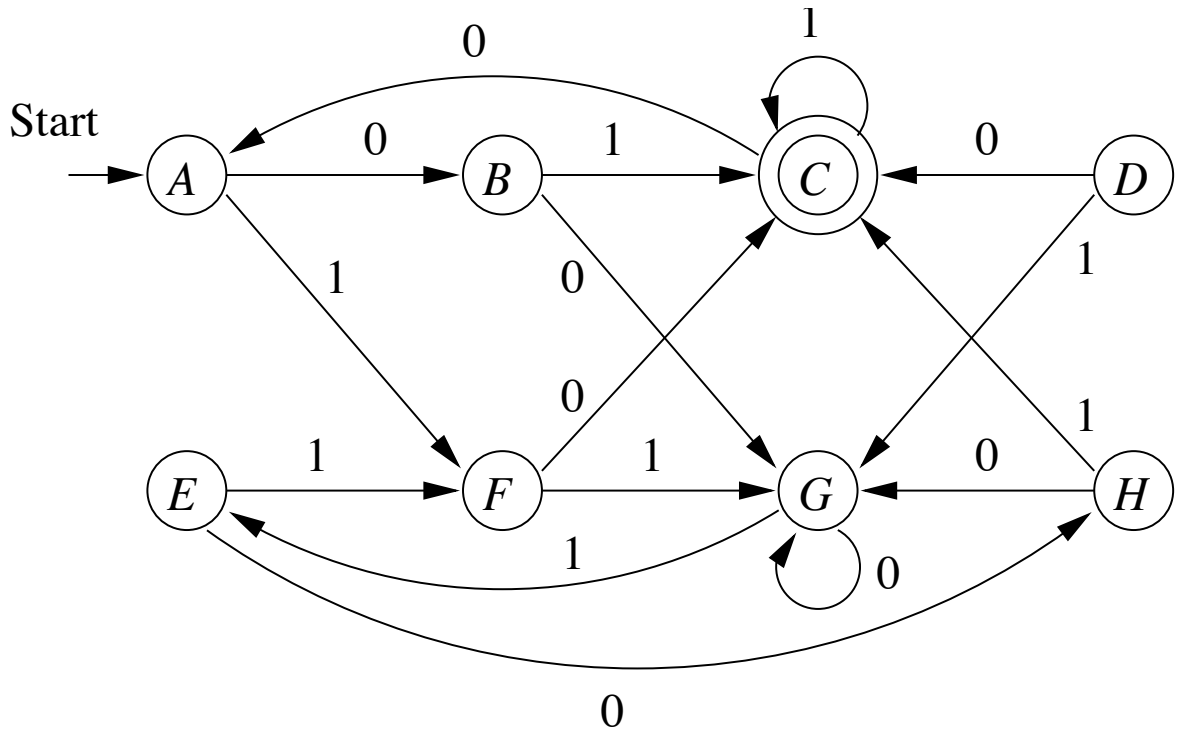
- Se $p \equiv q$ diciamo che $p$ e $q$ sono *equivalenti*
- Se $p \not\equiv q$ diciamo che $p$ e $q$ sono *distinguibili*

In altre parole: $p$ e $q$ sono distinguibili se e solo se

$$\exists w : \hat{\delta}(p, w) \in F \text{ e } \hat{\delta}(q, w) \notin F, \text{ o viceversa}$$

Ovvero se e solo se esiste almeno una stringa w che li differenzia, ovvero l'automa si muove da $p$ in uno stato accettante e da $q$ in uno stato non accettante (o viceversa).

# Esempio




$\hat{\delta}(C, \epsilon) \in F, \hat{\delta}(G, \epsilon) \notin F \Rightarrow C \not\equiv G$
$\hat{\delta}(A, 01) = C \in F, \hat{\delta}(G, 01) = E \notin F \Rightarrow A \not\equiv G$

# Stati distinguibili

Alcuni stati distinguibili:

- $C \neq G$ infatti $C$ è accettante e $G$ no. Formalmente, la stringa che li distingue è la stringa vuota,

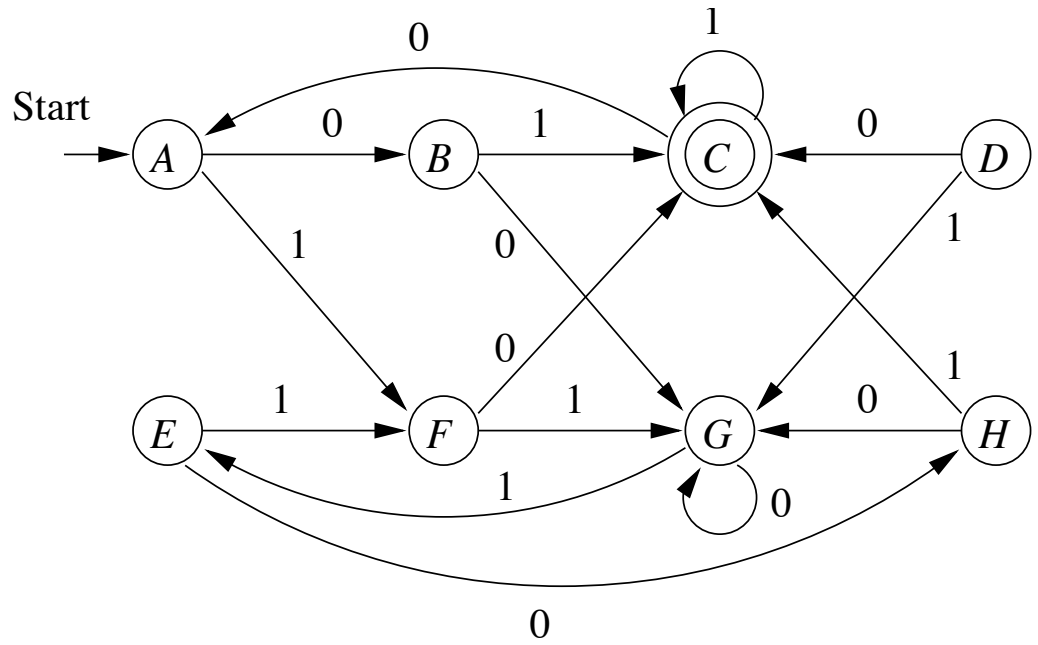
$$\hat{\delta}(C, \epsilon) \in F, \hat{\delta}(G, \epsilon) \notin F$$

- Consideriamo $A$ e $G$. Non sono distinti da $\epsilon$ (entrambi non sono accettanti). Non sono distinti da 0 perche porta $A$ in $B$ e $G$ in se stesso, ma entrambi non sono accettanti. Analogamente non sono distinti da 1 perche porta $A$ in $F$ e $G$ in $E$, ma entrambi non sono accettanti. Abbiamo tuttavia:

$$\hat{\delta}(A, 01) = C \in F, \hat{\delta}(G, 01) = E \notin F \Rightarrow A \not\equiv G$$

Dato che $C$ è accettante e $E$ non lo è, la stringa 01 distingue $A$ da $G$, ovvero $A \not\equiv G$.

# Cosa si può dire su $A$ e $E$?




$\hat{\delta}(A, \epsilon) = A \notin F, \hat{\delta}(E, \epsilon) = E \notin F$
$\hat{\delta}(A, 1) = F = \hat{\delta}(E, 1)$
Quindi $\hat{\delta}(A, 1x) = \hat{\delta}(E, 1x) = \hat{\delta}(F, x)$
$\hat{\delta}(A, 00) = G = \hat{\delta}(E, 00)$
$\hat{\delta}(A, 01) = C = \hat{\delta}(E, 01)$
Conclusione: $A \equiv E$.

# Algoritmo induttivo

Possiamo calcolare *tutte e sole* le coppie di stati distinguibili con il seguente metodo induttivo (**algoritmo di riempimento-tabella**):
Formalmente, calcoliamo la minima relazione $R_A \subseteq Q \times Q$ tale che
**Base:** Se $p \in F$ e $q \notin F$, allora $(p, q) \in R_A$, ovvero $p \not\equiv q$.
**Induzione:** Se $\exists a \in \Sigma : (\delta(p, a), \delta(q, a)) \in R_A$, ovvero $\delta(p, a) \not\equiv \delta(q, a)$, allora $(p, q) \in R_A$, ovvero $p \not\equiv q$.

# Algoritmo induttivo

Applichiamo l'algoritmo ad A:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $B$ | $x$ | | | | | |
| $C$ | $x$ | $x$ | | | | |
| $D$ | $x$ | $x$ | $x$ | | | |
| $E$ | | $x$ | $x$ | $x$ | | |
| $F$ | $x$ | $x$ | $x$ | | $x$ | |
| $G$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | |
| $H$ | $x$ | | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ |
| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ |

Le coppie *marcate* nella tabella stanno in $R_A$ (sono distinguibili).
Le coppie $(E, A)$, $(B, H)$, $(F, D) \notin R_A$ sono le uniche che risultano non distinguibili, equivalenti.

# Algoritmo: dettagli

1. Marcare tutte le coppie $(q_i, q_j).q_i \in F \wedge q_j \notin F$ o viceversa: dato che $C$ è l'unico stato accettante, l'algoritmo parte con $(C, q) \in R_A$ per qualsiasi altro stato $q$
2. Marcare ogni coppia non ancora marcata $(q_i, q_j)$ se $(\delta(q_i, a), \delta(q_j, a))$ $(a \in \Sigma)$ è già marcata: marchiamo gli stati $(p, q)$ che si muovono con $a$ in una coppia di stati del punto 1. Ad es. la coppia $(E, F)$ viene aggiunta perché si muove in $(H, C)$ con input 0. Analogamente, vengono aggiunte tutte le altre coppie, a eccezione di $(A, G)$ e di $(E, G)$.
3. Ripetere il passo precedente fino a che non si possono marcare ulteriori stati: al passo successivo si aggiungono le coppie $(A, G)$ ed $(E, G)$. Infatti in entrambi i casi i due stati si muovono, leggendo 1, negli stati $(E, F)$, che sono stati aggiunti al passo 2.
4. Le coppie rimaste $(q_i, q_j) \notin R_A$ ( $(E, A)$, $(B, H)$, $(F, D)$) sono di stati **indistinguibili**: non ci sono altre coppie da aggiungere.

# Variante al modo di procedere (Algoritmo di Hopcroft)

1. Si inizia proponendo una prima partizione: gli stati in $F$ e quelli $Q \setminus F$, in modo da non avere nella partizione finale nessuna classe con stati finale e non finali.
2. Poi - iterativamente - si affina questa partizione, fino ad arrivare alle classe finali: per ogni stato $q$ di una classe si osserva dove si arriva con 0: se non si rimane nella stessa classe di $q$, allora $q$ forma una nuova classe insieme agli stati che si comportano come $q$, ovvero che su 0 vanno nello stesso stato raggiunto da $q$ su 0. Si ripete il procedimento su 1. A questo punto si procede con la intersezione delle partizioni ottenute e si ripete il procedimento a partire dalle nuove classi.

# Altro modo di procedere (2)

1. Dividiamo gli stati in $\{C\}$ e $\{A, B, D, E, F, G, H\}$.
2. Osserviamo che con 0: da $A$ si va in $B$ (stessa classe), da $B$ si va in $G$ (stessa classe), mentre da $D$ si va in $C$ (l'altra classe), da $E$ si va in $H$ (stessa classe), da $F$ si va in $C$ (altra classe, come $G$), da $G$ si va in $G$ (stessa classe), infine da $H$ si va in $G$ (stessa classe). Nuova partizione della classe degli stati non finali: $\{A, B, E, G, H\}$ e $\{D, F\}$.
3. Osserviamo che con 1: da $A$ si va in $F$ (stessa classe), da $B$ si va in $C$ (altra classe), mentre da $D$ si va in $G$ (stessa classe), da $E$ si va in $F$ (stessa classe), da $F$ si va in $G$ (stessa classe), da $G$ si va in $E$ (stessa classe), infine da $H$ si va in $C$ (altra classe). Nuova partizione della classe degli stati non finali: $\{A, D, E, F, G\}$ e $\{B, H\}$.
4. Intersecando otteniamo: $\{A, E, G\}$, $\{B, H\}$, $\{C\}$, $\{D, F\}$.
5. Ripetiamo. e otteniamo: $\{A, E\}$ e $\{G\}$.

# Correttezza dell'algoritmo

**Teorema 4.20:** Se $p$ e $q$ non sono distinguibili dall'algoritmo, allora $p \equiv q$. Ovvero

$$(p, q) \notin R_A \text{ sse } p \equiv q$$

**Dimostrazione:** Supponiamo per assurdo che esista una *coppia "sbagliata"* $\{p, q\}$, tale che

1. $\exists w : \hat{\delta}(p, w) \in F, \hat{\delta}(q, w) \notin F$, o viceversa.
2. L'algoritmo non distingue tra $p$ e $q$, ovvero $(p, q) \notin R_A$.

Sia $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ la stringa più corta che identifica la coppia "sbagliata" $\{p, q\}$, ovvero $\hat{\delta}(p, w) \in F$ and $\hat{\delta}(q, w) \notin F$.
Allora $w \neq \epsilon$ perché altrimenti l'algoritmo distinguerebbe $p$ da $q$ (caso base). Quindi $n \geq 1$ (deve esserci almeno un simbolo $a_1$).

- Consideriamo gli stati $r = \delta(p, a_1)$ e $s = \delta(q, a_1)$
- Notiamo che

$$\hat{\delta}(p, w) = \hat{\delta}(r, a_2 \cdots a_n) \in F \text{ and } \hat{\delta}(q, w) = \hat{\delta}(s, a_2 \cdots a_n) \notin F$$

  Allora $\{r, s\}$ non può essere una coppia sbagliata perché $\{r, s\}$ sarebbe identificata da una stringa più corta di $w$.
- Quindi, l'algoritmo deve aver scoperto nel caso base che $r$ and $s$ sono distinguibili, ovvero $(r, s) \in R_A$.
- Ma allora l'algoritmo distinguerebbe $p$ da $q$ nella parte induttiva. Contraddizione.
- Quindi non ci sono coppie "sbagliate" e il teorema è vero.

# Transitività

**Teorema 4.23:** Se $p \equiv q$ e $q \equiv r$, allora $p \equiv r$.

**Dimostrazione:** Supponiamo per assurdo che $p \not\equiv r$.

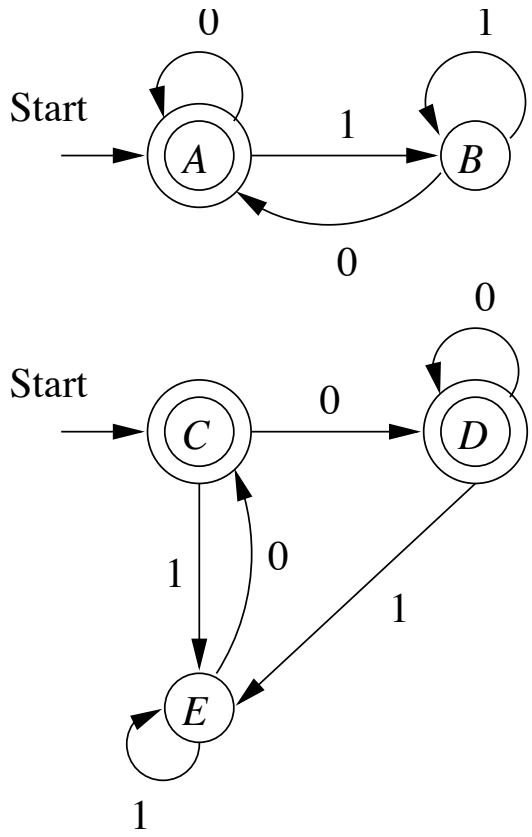
- Allora $\exists w$ tale che $\hat{\delta}(p, w) \in F$ e $\hat{\delta}(r, w) \notin F$, o viceversa.
- Lo stato $\hat{\delta}(q, w)$ o è di accettazione o no.
- *Caso 1*: $\hat{\delta}(q, w)$ è di accettazione. Allora $q \not\equiv r$.
- *Caso 2*: $\hat{\delta}(q, w)$ non è di accettazione. Allora $p \not\equiv q$.
- Il caso contrario può essere dimostrato simmetricamente.
- Quindi deve essere $p \equiv r$.

# Testare l'equivalenza di linguaggi regolari

Siano $L$ e $M$ linguaggi regolari (descritti in qualche forma).
Per testare se $L = M$

1. convertiamo sia $L$ che $M$ in DFA.
2. Immaginiamo il DFA che sia l'unione dei due DFA (non importa se ha due stati iniziali)
3. Se l'algoritmo dice che i due stati iniziali sono distinguibili, allora $L \neq M$, altrimenti $L = M$.

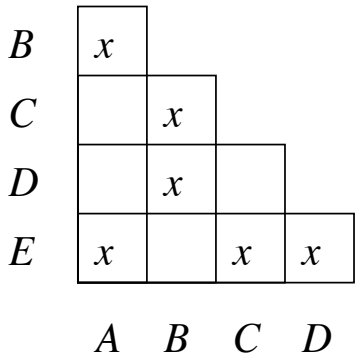
# Esempio




Possiamo vedere che entrambi i DFA accettano $L(\epsilon + (\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\mathbf{0})$.

# Esempio

Il risultato dell'algoritmo è




La coppia di stati iniziali $(A, C)$ non è marcata. Quindi i due automi sono equivalenti.

# Minimizzazione di DFA

- Possiamo usare l'algoritmo per minimizzare un DFA mettendo insieme tutti gli stati equivalenti. Cioè rimpiazzando $p$ by $p/_{\equiv}$.
- Il DFA unione di prima ha le seguenti classi di equivalenza: $\{\{A, C, D\}, \{B, E\}\}$.
- Notare: affinché $p/_{\equiv}$ sia una *classe di equivalenza*, la relazione $\equiv$ deve essere una *relazione di equivalenza* (riflessiva, simmetrica, e transitiva).

# Classi di equivalenza

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $B$ | $x$ | | | | | |
| $C$ | $x$ | $x$ | | | | |
| $D$ | $x$ | $x$ | $x$ | | | |
| $E$ | | $x$ | $x$ | $x$ | | |
| $F$ | $x$ | $x$ | $x$ | | $x$ | |
| $G$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ |
| $H$ | $x$ | | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ |
| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ |

Il primo DFA esaminato ha le seguenti classi di equivalenza:

$$\{\{A, E\}, \{B, H\}, \{C\}, \{D, F\}, \{G\}\}$$

# Minimizzazione di automi

Per minimizzare un DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ costruiamo un DFA $B = (Q/_{\equiv}, \Sigma, \gamma, q_0/_{\equiv}, F/_{\equiv})$, dove

$$\gamma(p/_{\equiv}, a) = \delta(p, a)/_{\equiv},$$

ovvero le mosse della classe di equivalenza dello stato $p$, per ogni $a \in \Sigma$ sono la classe di equivalenza trovata tramite $\delta$ per ogni stato $p \in p/_{\equiv}$.

**Nota** Affinché $B$ sia ben definito, dobbiamo mostrare che

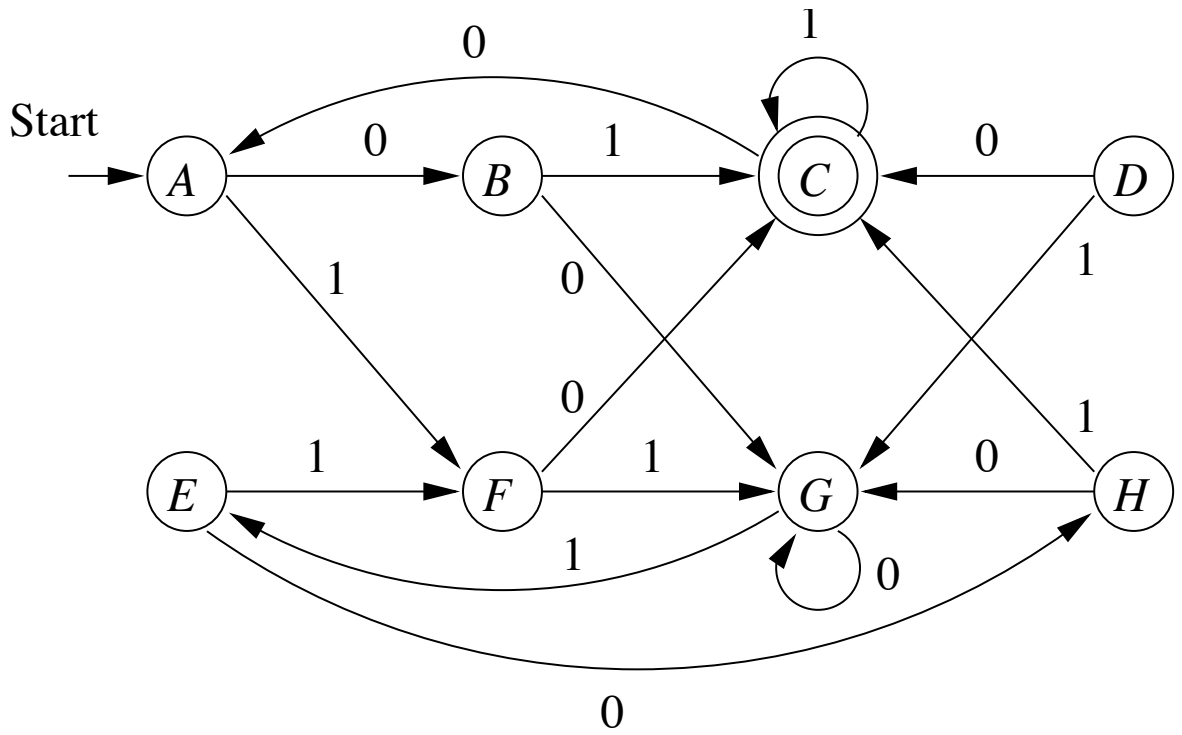
$$\text{Se } p \equiv q \text{ allora } \delta(p, a) \equiv \delta(q, a)$$

Se $\delta(p, a) \not\equiv \delta(q, a)$, allora l'algoritmo concluderebbe $p \not\equiv q$, quindi $B$ è ben definito.

Analogamente, si può mostrare che $F/_{\equiv}$ contiene tutti e soli gli stati accettanti di $A$.

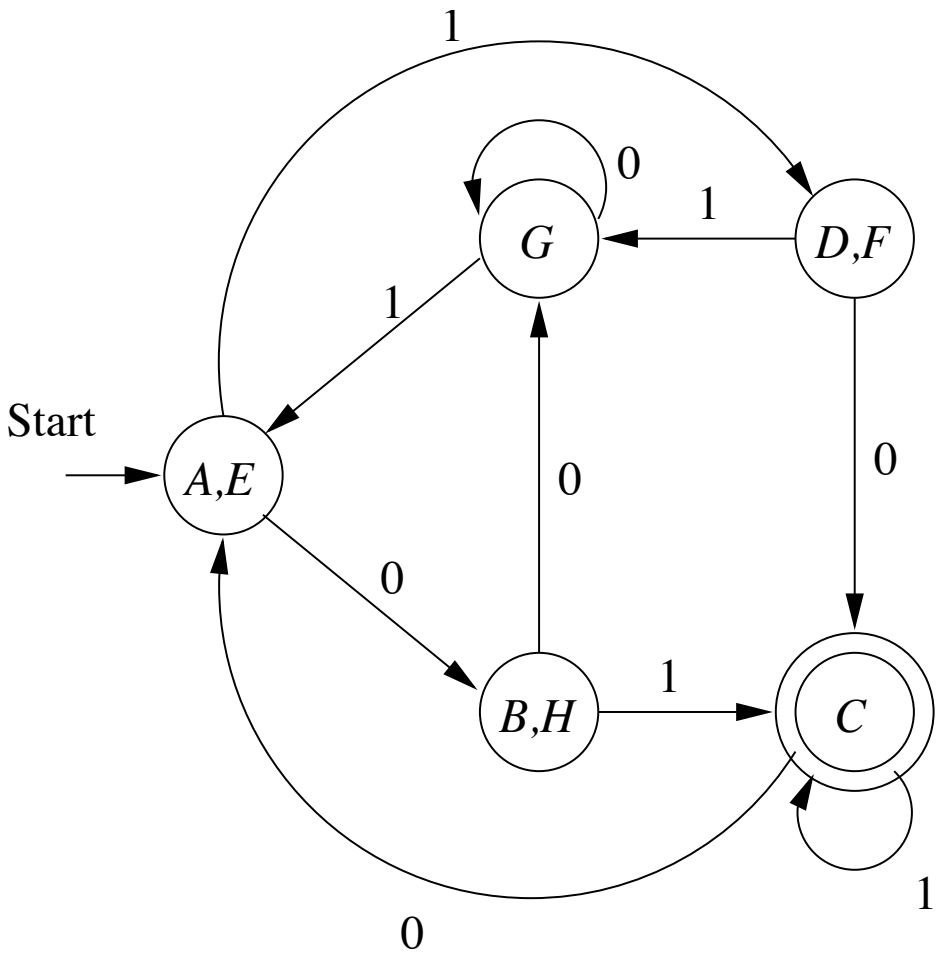
# Esempio

Possiamo minimizzare



# Esempio

Otteniamo:



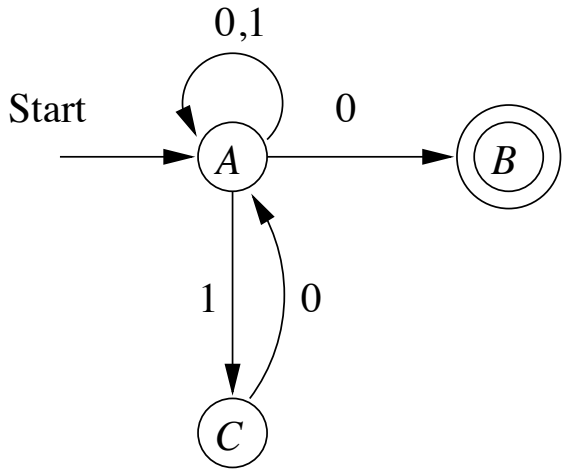
# Commenti

- Gli stati sono le classi di equivalenza

$$\{\{A, E\}, \{B, H\}, \{C\}, \{D, F\}, \{G\}\}$$

- lo stato iniziale è la classe di equivalenza dello stato iniziale $A$, ovvero $\{A, E\}$
- gli stati accettanti sono le classi di equivalenza dell'unico stato accettante $C$, ovvero $\{C\}$
- per ogni classe di equivalenza e per ogni simbolo, tutta la classe si muove in modo uniforme. Esempio: $\{A, E\}$ leggendo 0 si muove in $\{B, H\}$.

**Nota**: Non possiamo applicare l'algoritmo agli NFA. Proviamo a minimizzare, ad esempio, l'NFA che riconosce il linguaggio $(0+1)^*(10)^*(0+1)^*0$




- Intuitivamente possiamo rimuovere lo stato $C$ e le sue transizioni.
- L'algoritmo tuttavia non riporterebbe nessuna coppia di stati equivalenti
- $B$ è finale e distinguibile da $A$ e $C$
- Si può togliere lo stato $C$ e il ciclo, ma $A \not\equiv C$, quindi l'automa non è minimo.

# Perché non si può migliorare il DFA minimizzato

- Sia $B$ il DFA minimizzato ottenuto applicando l'algoritmo al DFA $A$.
- Sappiamo già che $L(A) = L(B)$.
- Potrebbe esistere un DFA $C$, con $L(C) = L(B)$ e meno stati di $B$?
- Applichiamo l'algoritmo a $B$ "unito con" $C$.
- Dato che $L(B) = L(C)$, abbiamo $q_0^B \equiv q_0^C$.
- Inoltre, $\delta(q_0^B, a) \equiv \delta(q_0^C, a)$, per ogni $a$.

- Per ogni stato $p$ in $B$ esiste almeno uno stato $q$ in $C$, tale che $p \equiv q$.
- **Dimostrazione**:
  - Non ci sono stati inaccessibili, quindi $p = \hat{\delta}(q_0^B, a_1 a_2 \cdots a_k)$, per una qualche stringa $a_1 a_2 \cdots a_k$.
  - Allora $q = \hat{\delta}(q_0^C, a_1 a_2 \cdots a_k)$, e $p \equiv q$.
  - Dato che $C$ ha meno stati di $B$, ci devono essere due stati $r$ e $s$ di $B$ tali che $r \equiv t \equiv s$, per qualche stato $t$ di $C$.
  - Ma allora $r \equiv s$ che è una contraddizione, dato che $B$ è stato costruito dall'algoritmo.