Esercizio: L_1

Dimostrare, usando il Pumping Lemma, che il linguaggio seguente, L_1, non è *regolare*.

$$\{a^n b^m c^{n+m} \in \{a,b\}^* | n \geq 1, m \geq 0\}$$

Esercizio: L_1

Dimostrare, usando il Pumping Lemma, che il linguaggio seguente, L_1, non è *regolare*.

$$\{a^n b^m c^{n+m} \in \{a,b\}^* | n \geq 1, m \geq 0\}$$

- Supponiamo che L_1 sia regolare. Allora $w = a^n b^m c^{n+m} \in L_1$.
- Per il pumping lemma, $w = xyz$, $|xy| \leq n$, $y \neq \epsilon$ e $xy^k z \in L_1$
- Fissiamo n come costante e $w = a^n b^m c^n + m$. Per la suddivisione notiamo che, in ogni caso, $y = a^j$, con $0 < j \leq n$.
- In particolare, xz dovrebbe essere in L_1, ma $xz = a^{n-j} b^m c^{n+m}$ ha meno a, dato che $|a^{n-j} b^m| = n + m - j \neq n + m = |c^{n+m}|$. Di conseguenza non appartiene a L_1.
- Il linguaggio non è regolare, ma è libero. Pensare a una grammatica libera per L_1.

Esercizio: L_2

Dimostrare, usando il Pumping Lemma, che il linguaggio seguente, L_2, non è *regolare*.

$$\{a^i b^j \in \{a,b\}^* | mcd(i,j) = 1\}$$

Esercizio: L_2

Dimostrare, usando il Pumping Lemma, che il linguaggio seguente, L_2, non è *regolare*.

$$\{a^i b^j \in \{a,b\}^* | mcd(i,j) = 1\}$$

- Supponiamo che L_2 sia regolare
- Fissiamo n come costante e scegliamo $w = a^q b^{(q-1)!}$, in cui q e il più piccolo primo maggiore di n. piccolo primo maggiore di n.
- Allora y deve essere formato da sole a: $y = a^j$ con $0 < j \leq n$. In particolare xz dovrebbe appartenere a L_2. Tuttavia $xz = a^{q-j} b^{(q-1)!}$ e dato che $mcd(q-j, (q-1)!) = q-j$, abbiamo che $xz \notin L_2$
- Quindi questo linguaggio non è regolare.

Esercizio: L_3

Dimostrare, usando il Pumping Lemma, che il linguaggio seguente, L_3, non è *regolare*.

$$\{0^{n^2} | n \text{ intero}\}$$

Esercizio: L_3

Dimostrare, usando il Pumping Lemma, che il linguaggio seguente, L_3, non è *regolare*.

$$\{0^{n^2} | n \text{ intero}\}$$

- Supponiamo che L_3 sia regolare.
- Fissiamo n come costante e $w = 0^{n^2}$.
- Allora $y = 0^j$ è formato di 0, con $1 \leq j \leq n$. In particolare, $xyyz$ dovrebbe essere in L_3,
- ma se $1 \leq j \leq n$, allora $xyyz$ è tale che $|xyyz| = |xyz| + |y| = n^2 + j$ e quindi $n^2 + 1 < |xyyz| < n^2 + n$. Il successivo quadrato è tuttavia $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$. Di conseguenza non può appartenere a L_3.
- Il linguaggio non è regolare. Si può dimostrare che non è nemmeno libero.

Proprietà di Chiusura 1

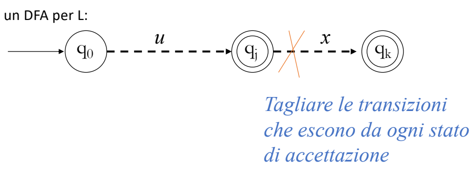
Si definisce *min* di un linguaggio L come l'insieme delle stringhe w in L tali che nessun prefisso proprio (ovvero diverso da ϵ e da w stessa) di w sia in L.

$$min(L) = \{w \in L : \nexists u \in L, v \in \Sigma^+, t.c.\ w = uv\}$$

Ad esempio, se $L' = \{\mathbf{00}, \mathbf{00}1, \mathbf{00}01, 101\}$ allora $min(L') = \{00, 101\}$.
Dimostrare, in generale, che se L è un **qualsiasi** (non uno in particolare) linguaggio regolare, allora lo è anche $min(L)$.
Suggerimento: In questa tipologia di esercizi si suggerisce di partire da un automa A per un generico linguaggio regolare L e di dire come modificare A (in termini di stati e/o di archi) per ottenere un automa B che riconosce il linguaggio modificato, in questo caso $min(L)$.

Proprietà di Chiusura 1

Dimostrazione. Sia L riconosciuto da un DFA
$A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, q_0, F_A)$.
Scegliamo come stati finali i q per i quali non esiste un percorso dallo stato iniziale q_0 a q che passi per un altro stato finale.
Modifichiamo la DFA, aggiungendo uno stato pozzo e cancellando tutti gli archi che escono da qualsiasi stato accettante (inclusi i cappi) e reindirizzandoli verso lo stato pozzo. Allora
$L(B) = min(L)$.



Proprietà di Chiusura 1

Si può dimostrare che $w \in min(L)$ se e solo se w viene accettata da B e che quindi $min(L)$ è regolare.

- Se la stringa w viene accettata da B, allora porta A a uno stato finale, quindi viene accettata da A e deve essere in $min(L)$, dato che non passa attraverso nessuno stato finale.
- D'altra parte, se $w \in min(L)$, deve portare A a uno stato finale senza passare per nessuno stato finale, quindi nessuna delle transizioni di cui ha bisogno viene rimossa in B, il che significa che w viene accettato anche da B.

Proprietà di Chiusura 1

Si può dimostrare che $min(L)$ è regolare anche osservando che $min(L) = L \setminus (L \cap L\Sigma^+) = L \setminus L\Sigma^+$, dove $L\Sigma^+$ contiene stringhe $w = xy$ where $x \in L$, e sfruttando le proprietà dichiusura già note.

Proprietà di Chiusura 2

Sia L un linguaggio e a un simbolo, allora si definisce L/a il *quoziente* di L e a, come l'insieme delle stringhe w tali che $wa \in L$.
Ad esempio se $L = \{a, aa, baa\}$, allora $L/a = \{\epsilon, a, ba\}$.
Dimostrare che se L è regolare anche L/a lo è.
Si consiglia di partire da un DFA per L e di dire come modificarlo per ottenere un DFA per L/a.

Proprietà di Chiusura 2

Sia L un linguaggio e a un simbolo, allora si definisce L/a il *quoziente* di L e a, come l'insieme delle stringhe w tali che $wa \in L$.
Ad esempio se $L = \{a, aa, baa\}$, allora $L/a = \{\epsilon, a, ba\}$.
Dimostrare che se L è regolare anche L/a lo è.
Si consiglia di partire da un DFA per L e di dire come modificarlo per ottenere un DFA per L/a.
Dimostrazione. Sia L riconosciuto da un DFA

$$A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, q_0, F_A).$$

Si costruisca un nuovo DFA B, che è fatto come quello per A, tranne per il fatto che uno stato q è finale per B se e solo se $\delta(q, a)$ è finale per A.
Di conseguenza B accetta una stringa w se e solo se A accetta wa.
Allora $L(B) = L/a$.

Proprietà di Chiusura 3

Sia L un linguaggio e a un simbolo, allora si definisce $\frac{dL}{da}$ la *derivata* di L e a come l'insieme delle stringhe w tali che $aw \in L$. Ad esempio se $L = \{a, aab, baa\}$, allora $\frac{dL}{da} = \{\epsilon, ab\}$.

- Dimostrare che se L è regolare anche $\frac{dL}{da}$ lo è. Ricordare che i linguaggi regolari sono chiusi rispetto all'operazione di inversione e di quoziente.
- Se R è un'espressione regolare $\frac{dR}{da}$ sta per $\frac{dL}{da}$, se $L = L(R)$. Tale derivate si applicano alle espressioni regolari in modo analogo a quello in cui si applicano le derivate alle espressioni aritmetiche. Ad esempio:

$$\frac{d(R+S)}{da} = \frac{d(R)}{da} + \frac{d(S)}{da}$$

  Scrivere la regola per $\frac{d(RS)}{da}$. Attenzione, la regola è simile ma non uguale a quella del prodotto. Serve distinguere se ϵ è o non è in $L(R)$

Proprietà di Chiusura 3

Sia L un linguaggio e a un simbolo, allora si definisce $\frac{dL}{da}$ la *derivata* di L e a come l'insieme delle stringhe w tali che $aw \in L$. Ad esempio se $L = \{a, aab, baa\}$, allora $\frac{dL}{da} = \{\epsilon, ab\}$.

- Dimostrare che se L è regolare anche $\frac{dL}{da}$ lo è.
  Si prenda l'automa A per L. Si costruisca un nuovo DFA B, che è fatto come quello per A, tranne per il fatto che possiede uno stato q che è finale per B se e solo se $\delta(q, a)$ è finale per A. Di conseguenza B accetta una stringa `w` se e solo se A accetta `wa`, cioè $L(B) = L/a$. Si applica quindi il fatto che i linguaggi regolari sono chiusi rispetto all'operazione di inversione e di quoziente.
  Oppure si può costruire direttamente un DFA per $\frac{dL}{da}$.