CONI E POLARITÀ

$Y \subseteq \mathbb{R}^n$,

<u>Def</u> Y è un CONO se $(y \in Y,\ t \overset{(t \geq 0?)}{>} 0 \Rightarrow ty \in Y)$

(i) $Y^o = \{ z^* \in \mathbb{R}^n \mid \langle z^*, y \rangle \leq 0 \ \forall y \in Y \}$ si dice CONO POLARE di Y

(ii) $Y^* = (-Y)^o = \{ z^* \in \mathbb{R}^n \mid \langle z^*, y \rangle \geq 0 \ \forall y \in Y \}$ si dice CONO DUALE di Y

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in X$:

(iii) $N(X, \bar{x}) = \{ z^* \in \mathbb{R}^n \mid \langle z^*, x - \bar{x} \rangle \leq 0 \ \forall x \in X \}$ si dice CONO NORMALE a X in $\bar{x}$

È immediato verificare che i coni polare, duale e normale sono chiusi, convessi e non vuoti

<u>Teo</u> (bipolarità) Sia C un cono convesso chiuso. Allora $(C^o)^o = C$.

<u>dim</u> $c \in C \Rightarrow \langle z^*, c \rangle \leq 0 \ \forall z^* \in C^o \Rightarrow c \in (C^o)^o$ da cui $C \subseteq C^{oo}$

Per dimostrare l'inclusione opposta supponiamo per assurdo che esista $\bar{c} \in C^{oo}$ con $\bar{c} \notin C$

Per il <u>teo</u> (separazione stretta) esistono $z^* \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$ t.c. $\langle z^*, \bar{c} \rangle > \gamma > \langle z^*, c \rangle \ \forall c \in C$.

$0 \in C \Rightarrow \gamma > 0$. Inoltre se si avesse $\langle z^*, c \rangle > 0$ per qualche $c \in C$, $\langle z^*, tc \rangle \uparrow +\infty$ per $t \uparrow +\infty$ contraddirebbe $\gamma > \langle z^*, c \rangle \ \forall c \in C$. Quindi $\langle z^*, c \rangle \leq 0$ per ogni $c \in C$, da cui $z^* \in C^o$ e pertanto $\langle z^*, \bar{c} \rangle < 0$ in contraddizione con $\langle z^*, \bar{c} \rangle > \gamma > 0$. ∎

<u>Prop</u> Siano $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ coni convessi chiusi. Allora $C_1 \subseteq C_2 \Leftrightarrow C_2^o \subseteq C_1^o$

<u>dim</u> $\Rightarrow$) segue immediatamente dalla def.

$\Leftarrow$) basta applicare $\Rightarrow$) a $C_2^o \subseteq C_1^o$ grazie al <u>teo</u> (bipolarità) ∎

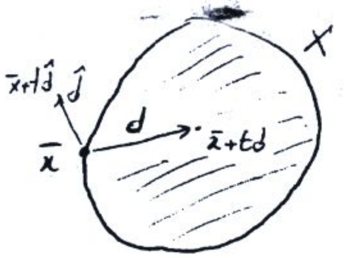
Per i coni duali valgono gli analoghi risultati:

<u>Teo</u> (bidualità) Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ cono convesso chiuso. Allora $C^{**} = C$.

<u>Prop</u> Siano $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ coni convessi chiusi. Allora $C_1 \subseteq C_2 \Leftrightarrow C_2^* \subseteq C_1^*$.

Def $d \in \mathbb{R}^n$ si dice DIREZIONE AMMISSIBILE per X in $\bar{x} \in X$ se

$\exists \bar{t} > 0$ t.c. $\bar{x} + td \in X \quad \forall t \in [0, \bar{t}]$



$F(X, \bar{x}) := \{ d \in \mathbb{R}^n \mid \exists \bar{t} > 0 \text{ t.c. } \bar{x} + td \in X \ \forall t \in [0, \bar{t}] \}$

si dice CONO DELLE DIREZIONI AMMISSIBILI per X in $\bar{x}$.

Es: $F(X, \bar{x})$ è un cono $\quad (d \in F(X, \bar{x}),\ t > 0 \Rightarrow td \in F(X, \bar{x}))$

Oss Se $\bar{x}$ è un punto interno di X ($\bar{x} \in \operatorname{int} X$), allora $F(X, \bar{x}) = \mathbb{R}^n$

Prop Siano X convesso e $\bar{x} \in X$. Allora

(i) $x - \bar{x}$ è una direzione ammissibile per X in $\bar{x} \in X$ per ogni $x \in X$.

(ii) Se $d \in F(X, \bar{x})$, allora esistono $\lambda \geq 0$, $x \in X$ tali che $d = \lambda(x - \bar{x})$

Cor Siano X convesso e $\bar{x} \in X$. Allora

$$F(X, \bar{x}) = \{ \lambda(x - \bar{x}) \mid \lambda \geq 0,\ x \in X \} =: \underbrace{\text{cono}}_{\text{cono generato}}(X - \bar{x})$$

© G. BIGI

dim prop

(i) Sia $t \in [0,1]$: $\bar{x} + t(x - \bar{x}) = (1-t)\bar{x} + tx \in X$ poiché X è convesso $\Rightarrow (x - \bar{x}) \in F(X, \bar{x})$

(ii) Sia $t > 0$ tale che $\bar{x} + td \in X$.

Posto $x = \bar{x} + td \in X$, risulta $d = 1/t\,(x - \bar{x})$. ∎

Es: dimostrare $F(X, \bar{x}) \subseteq \{ d \in \mathbb{R}^n \mid \limsup\limits_{t \downarrow 0} d_X(\bar{x} + td)/t = 0 \} = A(X, \bar{x})$

dove $d_X(y) := \inf \{ \|y - x\| \mid x \in X \}$ è la distanza di y da X.

$A(X, \bar{x}) := \{ d \in \mathbb{R}^n \mid \forall t_k \downarrow 0\ \exists d_k \to d \text{ t.c. } \bar{x} + t_k d_k \in X \}$

Nota: da Cor segue immediatamente X convesso $\Rightarrow F(X, \bar{x})$ convesso.

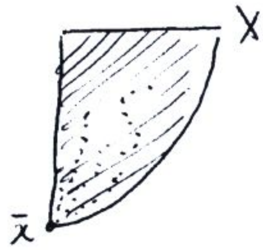
Condizioni di ottimalità (II^a parte)

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (non necessariamente convesso)

(P) $\min \{ f(x) \ : \ x \in X \}$

Idea per testare l'ottimalità locale di $\bar{x} \in X$: verificare che $f(\bar{x}) \leq f(x_n)$ con n suff.nte grande per ogni successione $\{x_n\} \subseteq X$ tale che $x_n \to \bar{x}$ e $x_n \neq \bar{x}$

$x_n = \bar{x} + t_n d_n$ con $t_n = \|x_n - \bar{x}\|_2$, $d_n = \dfrac{x_n - \bar{x}}{\|x_n - \bar{x}\|_2}$



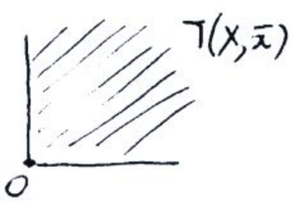
$d_n \in B(0,1) \Rightarrow \exists\, d \in B(0,1)$ t.c. $d_n \to d$
(considerando una opportuna sottosuccessione)
$t_n \to 0^+$

Def (i) $\{x_n\}$ si dice SUCCESSIONE AMMISSIBILE per $\bar{x} \in X$ se $\begin{cases} x_n \in X, \ x_n \neq \bar{x} \ \forall n \\ x_n \to \bar{x} \end{cases}$

(ii) $d \in \mathbb{R}^n$ si dice DIREZIONE LIMITE per X in $\bar{x}$ se esiste una successione ammissibile $\{x_n\}$ per $\bar{x} \in X$ tale che $(x_n - \bar{x})/\|x_n - \bar{x}\|_2 \longrightarrow d$. (nota: $\|d\|_2 = 1$)

Def $T(X, \bar{x}) := \{ d \in \mathbb{R}^n \mid \exists t_n \to 0^+ \ \exists d_n \to d \text{ t.c. } \bar{x} + t_n d_n \in X \}$ si dice CONO TANGENTE (di Bouligand) di X in $\bar{x} \in X$

(cono tangente $\equiv$ direzioni limite e loro multipli, cioè il cono generato dalle direzioni limite)



Proprietà o) $\bar{x} \in \operatorname{int} X \Rightarrow T(X,\bar{x}) = \mathbb{R}^n$

i) $T(X,\bar{x})$ è un cono chiuso

ii) $F(X,\bar{x}) \subseteq T(X,\bar{x})$ $[d_n \equiv d]$
(cono delle direzioni ammissibili)

iii) X convesso $\Rightarrow X \subseteq \bar{x} + T(X,\bar{x})$

iv) X convesso $\Rightarrow T(X,\bar{x}) = \operatorname{cl} F(X,\bar{x})$
chiusura

v) $\forall \varepsilon > 0 : T(X,\bar{x}) = T(X \cap B(\bar{x},\varepsilon), \bar{x})$

dim proprietà

i) Siano $d \in T(X,\bar{x})$, $\gamma > 0$: $\exists t_n \to 0^+, d_n \to d$ t.c. $\bar{x} + t_n d_n \in X$

Siano $\hat{t}_n = t_n/\gamma$ e $\hat{d}_n = \gamma d_n$. Risultano: $\hat{t}_n \to 0^+$ e $\hat{d}_n \to \gamma d$.

Inoltre $\bar{x} + \hat{t}_n \hat{d}_n = \bar{x} + t_n d_n \in X$. Quindi $\gamma d \in T(X,\bar{x}) \to T(X,\bar{x})$ è un cono

Sia $\{d_n\} \subseteq T(X,\bar{x})$ t.c. $d_n \to d$ per un qualche $d \in \mathbb{R}^n$.

$d_n \in T(X,\bar{x}) \Rightarrow \exists t_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0^+, e_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} d_n$ t.c. $\bar{x} + t_k e_k \in X$

$$\left.\begin{array}{l} t_k \to 0^+ \\ e_k \to d_n \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \bar{k} \text{ tale che } \left\{\begin{array}{l} \|e_k - d_n\|_2 \leq 1/n \\ t_k \leq 1/n \end{array}\right. \quad \forall k \geq \bar{k}.$$

Siano $\hat{t}_n = t_{\bar{k}}$ e $\hat{d}_n = e_{\bar{k}}$. Ovviamente $\bar{x} + \hat{t}_n \hat{d}_n \in X$ e $\hat{t}_n \to 0^+$.

$\|\hat{d}_n - d\|_2 \leq \|\hat{d}_n - d_n\|_2 + \|d_n - d\|_2 \leq 1/n + \|d_n - d\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ e quindi $\hat{d}_n \to d$

Pertanto $d \in T(X,\bar{x})$. $\longrightarrow T(X,\bar{x})$ è chiuso

ii) Sia $d \in F(X,\bar{x})$: $\exists \bar{t} > 0$ t.c. $\bar{x} + td \in X \quad \forall t \leq \bar{t}$.

Siano $d_n = d$ e $\{t_n\} \subseteq [0,\bar{t}]$ una qualsiasi successione per cui $t_n \to 0^+$.

Risulta $\bar{x} + t_n d_n = \bar{x} + t_n d \in X$, e quindi $d \in T(X,\bar{x})$

iii) Sia $x \in X$: $(x - \bar{x}) \in F(X,\bar{x})$ per la prop di pag ②.

Abbiamo $x = \bar{x} + (x - \bar{x}) \in \bar{x} + F(X,\bar{x})$. Quindi $X \subseteq \bar{x} + F(X,\bar{x}) \overset{(ii)}{\subseteq} \bar{x} + T(X,\bar{x})$.

iv) Dalla ii) abbiamo $\mathrm{cl}\, F(X,\bar{x}) \subseteq T(X,\bar{x})$ poiché $T(X,\bar{x})$ è chiuso.

Sia $d \in T(X,\bar{x})$: $\exists t_n \to 0^+, d_n \to d$ t.c. $\bar{x} + t_n d_n \in X$

Sia $\gamma \in [0,1]$: $(1-\gamma)\bar{x} + \gamma(\bar{x} + t_n d_n) \in X$ per la convessità di X

$$\begin{array}{c} (1-\gamma)\bar{x} + \gamma(\bar{x} + t_n d_n) \\ \| \\ \bar{x} + \gamma t_n d_n \end{array}$$

Quindi $\bar{x} + t d_n \in X \quad \forall t \in [0, t_n]$, da cui $d_n \in F(X,\bar{x})$.

Poiché $d_n \to d$, allora $d \in \mathrm{cl}\, F(X,\bar{x})$. Quindi $T(X,\bar{x}) \subseteq \mathrm{cl}\, F(X,\bar{x})$.

v) $X \cap B(\bar{x},\varepsilon) \subseteq X \Rightarrow T(X \cap B(\bar{x},\varepsilon), \bar{x}) \subseteq T(X,\bar{x})$

Per l'inclusione opposta basta osservare che

$\bar{x} + t_n d_n \in B(\bar{x},\varepsilon)$ se n è suff.nte grande

Prop (i) $N(X,\bar{x}) \subseteq (T(X,\bar{x}))^\circ$

(ii) X convesso $\Rightarrow$ $N(X,\bar{x}) = (T(X,\bar{x}))^\circ$ e $T(X,\bar{x}) = (N(X,\bar{x}))^\circ$

dim (i) Siano $z^* \in N(X,\bar{x})$ e $d \in T(X,\bar{x})$.

$d \in T(X,\bar{x}) \Rightarrow \exists t_n \downarrow 0, d_n \to d$ t.c. $\bar{x} + t_n d_n \in X$, quindi

$0 \geq \langle z^*, \bar{x} + t_n d_n - \bar{x} \rangle = \langle z^*, t_n d_n \rangle$ da cui $\langle z^*, d_n \rangle \leq 0$ e

passando al limite $\langle z^*, d \rangle \leq 0$. Dall'arbitrarietà di d segue che $z^* \in (T(X,\bar{x}))^\circ$

(ii) Siano $z^* \in (T(X,\bar{x}))^\circ$ e $y \in X$. Poiché X è convesso, $(y - \bar{x}) \in T(X,\bar{x})$

e quindi $\langle z^*, y - \bar{x} \rangle \leq 0$. Dall'arbitrarietà di y segue $z^* \in N(X,\bar{x})$

X convesso $\Rightarrow$ $T(X,\bar{x})$ cono convesso chiuso. Quindi per il teo (bipolarità)

$N(X,\bar{x}) = (T(X,\bar{x}))^\circ$ implica $T(X,\bar{x}) = (N(X,\bar{x}))^\circ$ ∎

Es: dimostrare $T(X,\bar{x}) = \{ d \in \mathbb{R}^n \mid \liminf_{t \downarrow 0} d_X(\bar{x}+td)/t = 0 \}$