RICERCA OPERATIVA - Programmazione lineare

1) Fornire le definizioni di soluzione di base primale, ammissibile e non ammissibile, degenere e non degenere, e di soluzione di base duale, ammissibile e non ammissibile, degenere e non degenere.

Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{lrcrcrl}
\max & & & & & x_3 & \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq 1 \\
 & x_1 & & & + & x_3 & \leq 2 \\
 & x_1 & & & & & \leq 1 \\
 & & & x_2 & & & \leq 1 \\
 & & & & & x_3 & \leq 1 \\
 & -x_1 & & & & & \leq 0 \\
 & & & -x_2 & & & \leq 0 \\
 & & & & & -x_3 & \leq 0
\end{array}$$

Fornire una soluzione di base primale degenere e non ammissibile ed una soluzione di base duale degenere e non ammissibile. Giustificare la risposta applicando le definizioni date sopra.

2) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{lrcrcl}
\max & x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & -x_1 & & & \leq & 1
\end{array}$$

(a) Si indichino basi che siano rispettivamente: *(i)* primale ammissibile e non degenere *(ii)* primale non ammissibile e degenere *(iii)* duale ammissibile e degenere *(iv)* duale ammissibile e non degenere.

3) Fornire le definizioni di soluzione di base primale, ammissibile e non ammissibile, degenere e non degenere, e di soluzione di base duale, ammissibile e non ammissibile, degenere e non degenere.

Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{lrcrcrl}
\max & x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq 3 \\
 & x_1 & & & + & x_3 & \leq 2 \\
 & x_1 & & & & & \leq 1 \\
 & & & x_2 & & & \leq 1 \\
 & & & & & x_3 & \leq 2
\end{array}$$

Fornire una soluzione di base primale ammissibile e degenere ed una soluzione di base duale non ammissibile e degenere. Giustificare la risposta applicando le definizioni date sopra.

4) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{lrcrcr}
\max & x_1 & & & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & - & 2x_2 & \leq & -2 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 4
\end{array}$$

Utilizzando il Teorema degli scarti complementari si verifichi se la soluzione $\bar{x} = (2, 2)$ è ottima per il problema, giustificando la risposta. In caso affermativo, si determini l'insieme delle soluzioni duali ottime.

5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\min & 2y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & + & y_4 & & \\
 & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & = & 1 \\
 & y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 & - & y_4 & = & 2 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Utilizzando gli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{y} = (0, 0, 1, 0)$ sia ottima per il problema. Inoltre, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale di quello dato. Giustificare le risposte.

6) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \min & 2y_1 & + & 6y_2 & + & 3y_3 & + & y_4 & & \\ & y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = & 2 \\ & y_1 & - & y_2 & & & + & y_4 & = & 1 \\ & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & = & 1 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Utilizzando il Teorema degli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{y} = (0, 0, 1, 1)$ è ottima per il problema. Giustificare la risposta.

7) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & 3x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & -x_1 & - & 2x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

Utilizzando il Teorema degli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{x} = (2, -2)$ è ottima per il problema. In caso affermativo, si individui l'insieme delle soluzioni duali ottime. Giustificare le risposte.

8) Si consideri il seguente problema di PL, parametrico rispetto al parametro α:

$$\begin{array}{lrcrcrl} \max & x_1 & + & 2x_2 & + & \alpha x_3 & \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq 2 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

Assumendo $\alpha = 1$, si determini una soluzione ottima del problema, utilizzando il Teorema degli scarti complementari. Si indichi quindi per quali valori di α la soluzione trovata resta ottima. Giustificare le risposte.

9) Si consideri il seguente problema di PL, in cui γ è un parametro reale:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & (-1-\gamma)x_1 & + & (-1+2\gamma)x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -1. \end{array}$$

Si individui l'insieme di valori di γ per cui $B = \{4, 5\}$ è una base ottima per tale problema, giustificando la risposta. Si consideri quindi la seguente variante del problema, in cui $\gamma = 0$ e α è un ulteriore parametro reale:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & -x_1 & - & x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4-2\alpha \\ & x_1 & & & \leq & 2-\alpha \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1+\alpha \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -1. \end{array}$$

Si individui l'insieme di valori di α per cui $B = \{4, 5\}$ è una base ottima per questo secondo problema.

10) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \max & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & \\ & x_1 & + & \beta x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\ & \gamma x_1 & - & x_2 & & & \leq & 3 \\ & -\alpha x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 0 \\ & x_1 & + & \alpha x_2 & - & \beta x_3 & \leq & 4 \end{array}$$

Si determinino tutte le terne di valori dei parametri α, β e γ per i quali $\bar{x} = (1, 1, 0)$ e $\bar{y} = (0, 1, 2, 0)$ sono rispettivamente una soluzione ottima del problema e del suo duale. Tra le terne così individuate si determini per quali di esse il problema duale ammette una soluzione ottima $\hat{y}$ tale che $\hat{y}_1 > 0$. Giustificare le risposte.

11) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rrrrrr} \max & & - & x_2 & & \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ & -x_1 & & & \leq & -1 \\ & -x_1 & - & 2x_2 & \leq & -1 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{2, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte.

12) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rrrrrr} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & & & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

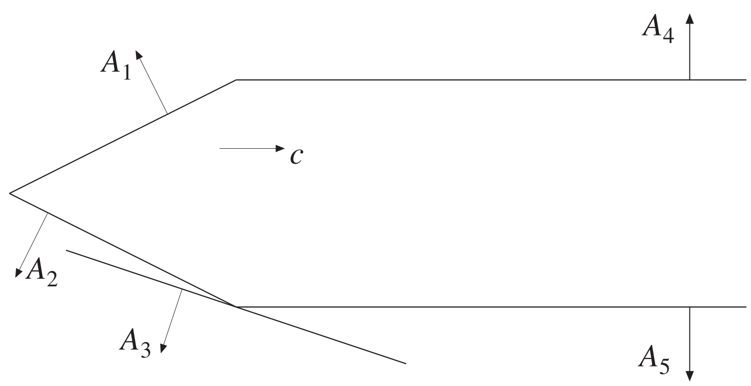
Si applichi l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte.

13) Si consideri il seguente problema di P.L.:

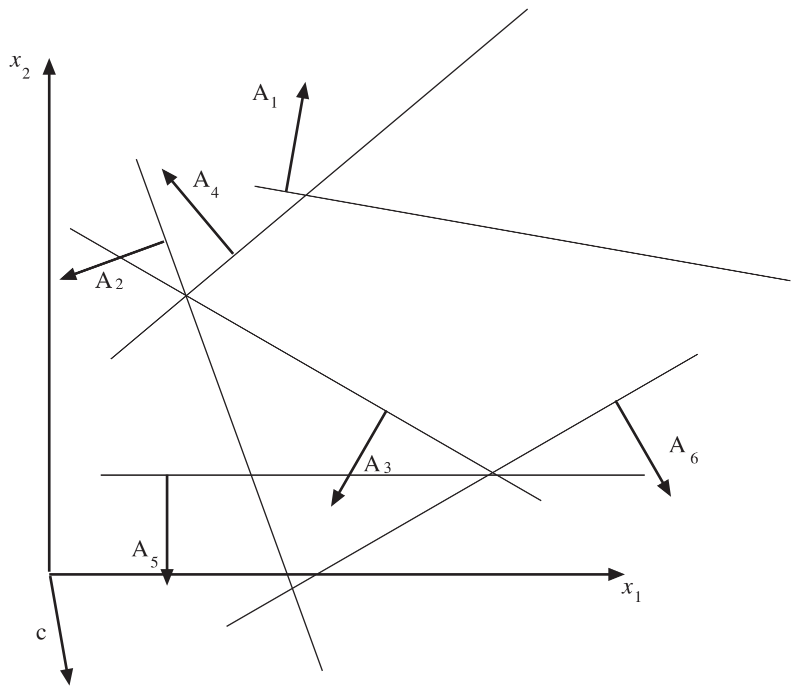
$$\begin{array}{rrrrrr} \max & & & x_2 & & \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & & & \leq & 1 \\ & & & -x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito, si discuta se la soluzione ottima individuata sia unica, giustificando la risposta.

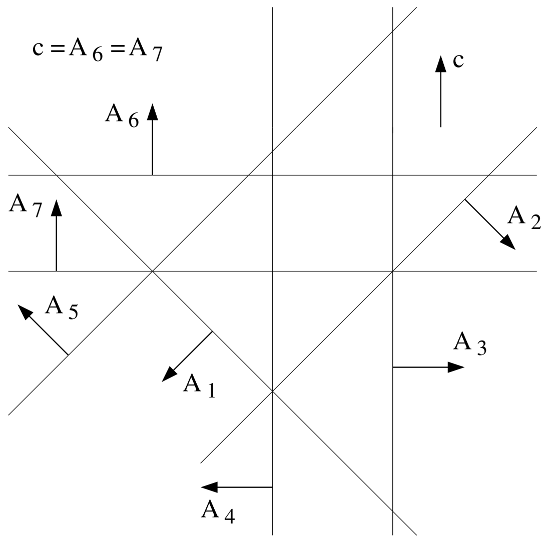
14) Si risolva geometricamente il problema di *PL* (di massimizzazione) in figura, mediante l'algoritmo del Simplesso Primale, partendo dalla base $B = \{1, 2\}$. Ad ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base, i segni delle variabili duali di base, l'indice uscente, la direzione di crescita individuata e l'indice entrante, giustificando le risposte.



15) Si risolva geometricamente per mezzo dell'algoritmo primale del simplesso il problema di PL di figura. Si usi come base di partenza $B = \{1, 4\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base e il segno delle variabili duali. Indicare poi, se ce ne sono, quali fra le soluzioni trovate sono degeneri.



16) Si risolva geometricamente per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale il problema di P.L. in figura, partendo dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, il segno delle variabili duali in base e gli indici uscente ed entrante, e si riportino sulla figura la soluzione primale e la direzione di spostamento, giustificando le risposte.



17) Si consideri il seguente problema di PL:

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & & & x_2 & & \\
 & & & x_2 & \leq & 4 \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\
 & -x_1 & & & \leq & 1 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & -x_1 & & & \leq & 0
\end{array}
$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte.

18) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & x_1 & & & & \\
 & & - & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & & & \leq & 0 \\
 & -x_1 & & & \leq & 1
\end{array}
$$

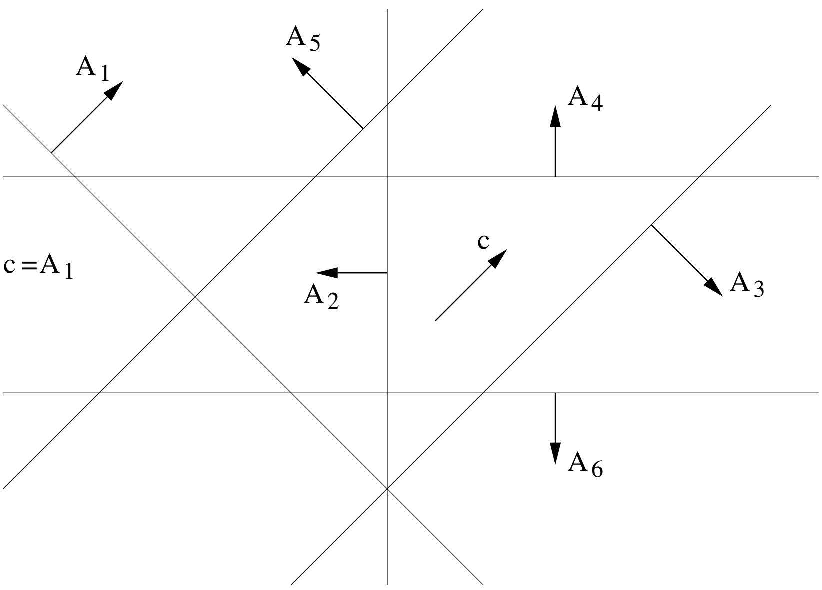
Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte.

19) Si consideri il seguente problema di P.L.:

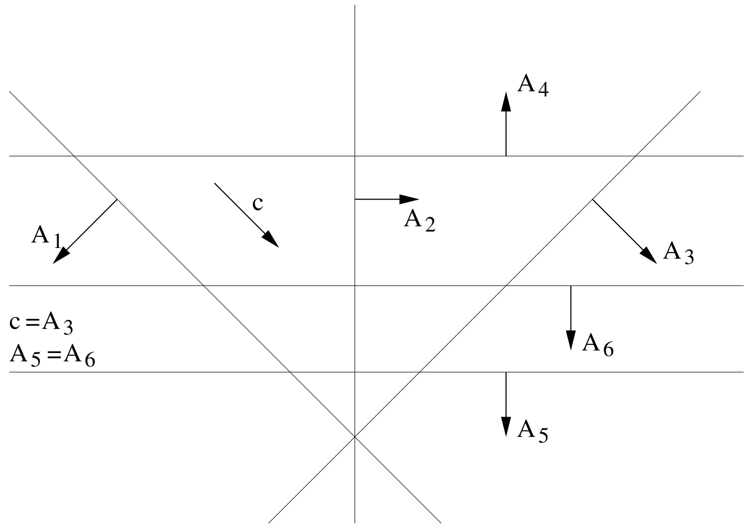
$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \\
 & -x_1 & & & \leq & 0 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2
\end{array}
$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice entrante h, giustificando le risposte.

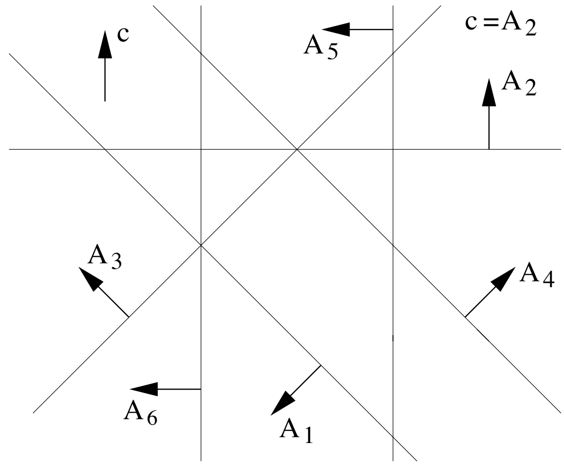
20) Si risolva graficamente il problema di P.L. indicato in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori $\bar{y}_B$ e η_B, l'indice uscente h, giustificando le risposte.



21) Si risolva graficamente il problema di P.L. indicato in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori $\overline{y}_B$ e η_B, l'indice uscente h, giustificando le risposte.



22) Si risolva graficamente il problema di PL indicato in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{4, 6\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori y_B e η_B, l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.



23) Il professore di Ricerca Operativa ha preparato un esercizio di Programmazione Lineare per il compito del prossimo 30 Giugno. Purtroppo, ha sbadatamente dimenticato il foglio con il testo e la soluzione dell'esercizio nel taschino della camicia, che ha poi lavato in lavatrice. Una volta recuperato ed asciugato il foglio, la maggior parte del testo e della soluzione risulta completamente illeggibile. Il professore riesce comunque a leggere che una soluzione ottima del problema primale è $\bar{x} = (1, 1, 0)$ e che una soluzione ottima del problema duale è $\bar{y} = (2, 0, 0, 1)$ ma non è altrettanto fortunato con la formulazione del problema. Con grande fatica riesce soltanto a decifrare i seguenti dati parziali:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \max & 5x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\ & & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 3 \\ & & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 0 \\ & -x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 2. \end{array}$$

Mentre la funzione obiettivo è completa, i vincoli individuati sono incompleti ed altri mancano completamente. Utilizza le tue conoscenze di Programmazione Lineare per aiutare il professore a recuperare l'esercizio, individuando una formulazione completa del problema primale che sia compatibile con i dati disponibili. Giustificare la risposta.