RICERCA OPERATIVA - Programmazione lineare

1) Fornire le definizioni di soluzione di base primale, ammissibile e non ammissibile, degenere e non degenere, e di soluzione di base duale, ammissibile e non ammissibile, degenere e non degenere.

Si consideri il seguente problema di PL:

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\max & & & & & x_3 & \\
& x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \le 1 \\
& x_1 & & & + & x_3 & \le 2 \\
& x_1 & & & & & \le 1 \\
& & & x_2 & & & \le 1 \\
& & & & & x_3 & \le 1 \\
& -x_1 & & & & & \le 0 \\
& & & -x_2 & & & \le 0 \\
& & & & & -x_3 & \le 0
\end{array}
$$

Fornire una soluzione di base primale degenere e non ammissibile ed una soluzione di base duale degenere e non ammissibile. Giustificare la risposta applicando le definizioni date sopra.

SVOLGIMENTO

Si condideri il problema di PL $\max\{cx : Ax \le b\}$.

Una soluzione primale $\bar{x}$ è di base se è soluzione di un sistema del tipo $A_B x = b_B$, dove B è un insieme di indici tale che la matrice A_B sia quadrata e non singolare; quindi, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$. Essa è ammissibile se soddisfa anche tutti i vincoli fuori base, cioè quelli i cui indici non appaiono in B, altrimenti viene detta non ammissibile; è non degenere se tutti i vincoli fuori base sono verificati come disuguaglianze strette, altrimenti viene detta degenere.

Una soluzione duale $\bar{y}$ è di base se è soluzione di un sistema del tipo $y_B A_B = c$, $y_N = 0$, dove B è un insieme di indici tale che la matrice A_B sia quadrata e non singolare ed N è il suo complemento; quindi, $\bar{y}_B = c A_B^{-1}$ e $\bar{y}_N = 0$. Essa è ammissibile se tutte le sue componenti sono non negative, altrimenti viene detta non ammissibile; è non degenere se tutte le componenti di $\bar{y}_B$ sono diverse da 0, altrimenti viene detta degenere.

Consideriamo la base $B = \{2, 3, 4\}$; la corrispondente matrice di base è

$$
A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},
$$

che è non singolare, essendo 1 il valore del suo determinante. La corrispondente soluzione di base primale si ottiene risolvendo il sistema

$$
A_B x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},
$$

ed è $\bar{x} = [1, 1, 1]$. Questa soluzione è non ammissibile perché non soddisfa il primo vincolo; inoltre è degenere perché il quinto vincolo, fuori base, è soddisfatto come uguaglianza.

Consideriamo ora la base $B = \{3, 7, 8\}$; la corrispondente matrice di base è

$$
A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},
$$

che è non singolare, essendo 1 il valore del suo determinante. La corrispondente soluzione di base duale si ottiene risolvendo il sistema

$$
y_B A_B = [0, 0, 1], \quad y_N = 0
$$

ed è $\bar{y} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1]$. Questa soluzione è non ammissibile perché è negativa; inoltre è degenere perché $\bar{y}_B$ ha due componenti nulle.

2) Si consideri il seguente problema di PL:

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max & x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & -x_1 & & & \leq & 1
\end{array}
$$

(a) Si indichino basi che siano rispettivamente: *(i)* primale ammissibile e non degenere *(ii)* primale non ammissibile e degenere *(iii)* duale ammissibile e degenere *(iv)* duale ammissibile e non degenere.

SVOLGIMENTO

$B_1 = \{2,3\}$ soddisfa sia (i) che (iii): la soluzione primale associata x^1 è ammissibile (vedi figura) e non degenere in quanto $I(x^1) = B_1$; essendo $c = A_3$, la soluzione duale associata risulta essere $y^1 = (0,0,1,0,0)$, che è ammissibile in quanto tutte le componenti sono non negative ed è degenere poiché $y^1_2 = 0$.

$B_2 = \{1,2\}$ soddisfa sia (ii) che (iv): la soluzione primale associata x^2 non è ammissibile (vedi figura) ed è degenere in quanto $I(x^2) = \{1,2,4\} \supset B_2$; la soluzione duale associata è ammissibile in quanto $c \in$ cono (A_1, A_2) ed è non degenere in quanto c non è parallelo né ad A_1 né ad A_2 e quindi entrambe le componenti in base sono diverse da zero.

3) Fornire le definizioni di soluzione di base primale, ammissibile e non ammissibile, degenere e non degenere, e di soluzione di base duale, ammissibile e non ammissibile, degenere e non degenere.

Si consideri il seguente problema di PL:

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\max & x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \le 3 \\
 & x_1 & & & + & x_3 & \le 2 \\
 & x_1 & & & & & \le 1 \\
 & & & x_2 & & & \le 1 \\
 & & & & & x_3 & \le 2
\end{array}
$$

Fornire una soluzione di base primale ammissibile e degenere ed una soluzione di base duale non ammissibile e degenere. Giustificare la risposta applicando le definizioni date sopra.

SVOLGIMENTO

Sia data la coppia di problemi di PL:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \max & cx \\
 & & Ax \le b
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lll}
\text{(D)} & \min & yb \\
 & & yA = c \\
 & & y \ge 0
\end{array}
$$

Una soluzione primale $\bar{x}$ è di base se è soluzione di un sistema del tipo $A_B x = b_B$, dove B è una base, cioè un insieme di indici tale che la matrice A_B sia quadrata, di rango massimo e perciò non singolare; quindi, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$. Essa è ammissibile se soddisfa anche tutti i vincoli fuori base, cioè se, posto N il complemento di B, risulta $A_N \bar{x} \le b_N$, altrimenti viene detta non ammissibile; è non degenere se tutti i vincoli fuori base sono verificati come disuguaglianze, cioè se per ogni $i \in N$ si ha $A_i \bar{x} \neq b_i$, altrimenti viene detta degenere.

Una soluzione duale $\bar{y}$ è di base se ha la forma $\bar{y} = (\bar{y}_B, \bar{y}_N)$ dove $\bar{y}_B = cA_B^{-1}$ e $y_N = 0$. Essa è ammissibile se tutte le componenti di $\bar{y}_B$ sono non negative, cioè $\bar{y}_B \ge 0$, altrimenti viene detta non ammissibile; è non degenere se tutte le componenti di $\bar{y}_B$ sono diverse da 0, altrimenti viene detta degenere.

Consideriamo la base $B = \{2, 3, 4\}$; la corrispondente matrice di base è

$$
A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},
$$

che è non singolare, essendo 1 il valore del suo determinante. La corrispondente soluzione di base primale si ottiene risolvendo il sistema

$$
A_B x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},
$$

ed è $\bar{x} = [1, 1, 1]$. Questa soluzione è ammissibile perché soddisfa anche il primo ed il quinto vincolo; inoltre è degenere perché il primo vincolo, fuori base, è soddisfatto come uguaglianza.

Consideriamo la stessa base per il problema duale:

$$
\bar{y}_B = cA_B^{-1} = [1, -2, 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = [1, 0, -2],
$$

quindi $\bar{y}_B = [\bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{y}_4] = [1, 0, -2]$ e $\bar{y}_N = [\bar{y}_1, \bar{y}_5] = [0, 0]$, da cui $\bar{y} = [0, 1, 0, -2, 0]$. Questa soluzione è non ammissibile perché $\bar{y}_4 = -2$; inoltre è degenere perché $\bar{y}_B$ ha una componente nulla.

4) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrrrrr} \max & x_1 & & & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & -2 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

Utilizzando il Teorema degli scarti complementari si verifichi se la soluzione $\bar{x} = (2, 2)$ è ottima per il problema, giustificando la risposta. In caso affermativo, si determini l'insieme delle soluzioni duali ottime.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \quad \begin{array}{c} \max \ cx \\ Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{l} \min \ yb \\ yA = c \\ y \geq 0 \end{array}$$

possiamo enunciare il Teorema degli scarti complementari come segue:

Teorema. Date due soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ ammissibili rispettivamente per (P) e (D), esse sono ottime se e solo se verificano la condizione degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, la condizione degli scarti complementari è equivalente al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Per il problema in esame si ha:

$$(P) \quad \begin{array}{rrrrrr} \max & x_1 & & & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & -2 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{rrrrrrrrrr} \min & 4y_1 & + & 2y_2 & - & 2y_3 & + & 4y_4 & & \\ & y_1 & & & + & y_3 & - & y_4 & = & 1 \\ & y_1 & + & y_2 & - & 2y_3 & + & y_4 & = & 0 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0. \end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{x} = (2, 2)$ è ammissibile per (P). L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \ldots, m\} : b_i - A_i\bar{x} = 0\} = \{1, 2, 3\}$. Di conseguenza, una soluzione duale $\bar{y}$, tale che $\bar{y}A = c$, che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $\bar{y}_4 = 0$. Affinché $\bar{y}$ sia ammissibile per (D), essa deve soddisfare il seguente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrrr} y_1 & & & + & y_3 & = & 1 \\ y_1 & + & y_2 & - & 2y_3 & = & 0 \\ y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0. \end{array} \right.$$

Posto $y_3 = \alpha$, tale sistema ammette infinite soluzioni della forma $(1 - \alpha, 3\alpha - 1, \alpha)$. Tali soluzioni hanno componenti non negative per $1/3 \leq \alpha \leq 1$. Pertanto, comunque si scelga α in tale intervallo, la soluzione $\bar{y}_\alpha = (1 - \alpha, 3\alpha - 1, \alpha, 0)$ è ammissibile per (D). Poiché ciascuna di tali soluzioni soddisfa la condizione degli scarti complementari con $\bar{x}$, $\bar{x}$ è una soluzione ottima per (P) e $\bar{y}_\alpha$ è una soluzione ottima per (D) per ogni $\alpha \in [1/3, 1]$.
Poiché $Y = \{(1 - \alpha, 3\alpha - 1, \alpha, 0) : 1/3 \leq \alpha \leq 1\}$ è l'insieme di tutte le soluzioni duali ammissibili complementari a $\bar{x}$, soluzione ottima di (P), Y costituisce l'insieme delle soluzioni ottime di (D).

5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl} \min & 2y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & + & y_4 & & \\ & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & = & 1 \\ & y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 & - & y_4 & = & 2 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Utilizzando gli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{y} = (0, 0, 1, 0)$ sia ottima per il problema. Inoltre, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale di quello dato. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \quad \begin{array}{l} \max \ cx \\ Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{l} \min \ yb \\ yA = c \\ y \geq 0 \end{array}$$

il teorema della dualità forte ed il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità duale:

Proposizione. Sia $\bar{y}$ una soluzione ammissibile per (D). Allora, $\bar{y}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{x}$ ammissibile per (P) complementare ad $\bar{y}$, ovvero tale che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ verifichino la condizione degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, la condizione degli scarti complementari è equivalente al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Per il problema in esame si ha:

$$(P) \quad \begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & & - & x_2 & \leq & 1 \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{rrcrcrcrcl} \min & 2y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & + & y_4 & & \\ & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & = & 1 \\ & y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 & - & y_4 & = & 2 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{y} = (0, 0, 1, 0)$ è ammissibile per (D). L'insieme degli indici delle variabili duali positive in $\bar{y}$ è $J(\bar{y}) = \{j \in \{1, \dots, m\} : \bar{y}_j > 0\} = \{3\}$. Di conseguenza, una soluzione primale ammissibile $\bar{x}$ che formi con $\bar{y}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $b_3 - A_3\bar{x} = 0$, ovvero il terzo vincolo deve essere attivo. Pertanto, $\bar{x}$ deve risolvere l'equazione

$$x_1 \ + \ 2x_2 \ = \ 4.$$

Posto $x_2 = \alpha$, tale equazione ammette infinite soluzioni della forma $x(\alpha) = (4 - 2\alpha, \alpha)$. Tali soluzioni sono ammissibili per (P) per ogni $\alpha \geq 2$. Infatti, $x(\alpha)$ rispetta il primo vincolo per $\alpha \geq 2$, il secondo per $\alpha \geq 1$ ed il quarto per $\alpha \geq -1$. Poiché $x(\alpha)$ soddisfa la condizione degli scarti complementari con $\bar{y}$ per $\alpha \geq 2$ ed è ammissibile, $\bar{y}$ è una soluzione ottima per (D). Poiché ogni soluzione ottima di (P) deve essere ammissibile ed essere complementare ad $\bar{y}$, l'insieme $\{(4 - 2\alpha, \alpha) \ : \ \alpha \geq 2\}$ è costituito da tutte le soluzioni ottime del problema (P), duale di quello dato.

6) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl} \min & 2y_1 & + & 6y_2 & + & 3y_3 & + & y_4 & & \\ & y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = & 2 \\ & y_1 & - & y_2 & & & + & y_4 & = & 1 \\ & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & = & 1 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Utilizzando il Teorema degli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{y} = (0, 0, 1, 1)$ è ottima per il problema. Giustificare la risposta.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \quad \begin{array}{l} \max\ cx \\ Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{l} \min\ yb \\ yA = c \\ y \geq 0 \end{array}$$

possiamo enunciare il Teorema degli scarti complementari come segue:

Teorema. Date due soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ ammissibili rispettivamente per (P) e (D), esse sono ottime se e solo se verificano la condizione degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, la condizione degli scarti complementari è equivalente al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Per il problema in esame si ha:

$$(P) \quad \begin{array}{rrcrcrcl} \max & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\ & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\ & x_1 & & & + & x_3 & \leq & 3 \\ & x_1 & + & x_2 & & & \leq & 1 \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{rrcrcrcrcl} \min & 2y_1 & + & 6y_2 & + & 3y_3 & + & y_4 & & \\ & y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = & 2 \\ & y_1 & - & y_2 & & & + & y_4 & = & 1 \\ & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & = & 1 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{y} = (0, 0, 1, 1)$ è ammissibile per (D). L'insieme degli indici delle variabili duali positive in $\bar{y}$ è $J(\bar{y}) = \{j \in \{1, \ldots, m\} : \bar{y}_j > 0\} = \{3, 4\}$. Di conseguenza, una soluzione primale $\bar{x}$ che formi con $\bar{y}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $b_i - A_i\bar{x} = 0$ per $i = 3, 4$, ovvero il terzo ed il quarto vincolo devono essere attivi. Pertanto, $\bar{x}$ deve risolvere il sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \end{array} \right.$$

Posto $x_1 = \alpha$, tale sistema ammette infinite soluzioni della forma $x(\alpha) = (\alpha, 1 - \alpha, 3 - \alpha)$. Tale soluzione è ammissibile per (P) soltanto quando $\alpha = 2$. Infatti, il primo vincolo è rispettato per $\alpha \geq 2$, mentre il secondo vincolo è soddisfatto per $\alpha \leq 2$. Poiché $x(2) = (2, -1, 1)$ soddisfa la condizione degli scarti complementari con $\bar{y}$ ed è ammissibile, $\bar{y}$ è una soluzione ottima per (D). Si osservi che, essendo $x(2)$ l'unica soluzione primale ammissibile complementare alla soluzione ottima duale $\bar{y}$, $x(2)$ è l'unica soluzione ottima di (P).

7) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcl}
\max & 3x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & -x_1 & - & 2x_2 & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 4
\end{array}$$

Utilizzando il Teorema degli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{x} = (2, -2)$ è ottima per il problema. In caso affermativo, si individui l'insieme delle soluzioni duali ottime. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P)\quad \begin{array}{l} \max\ cx \\ Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad (D)\quad \begin{array}{l} \min\ yb \\ yA = c \\ y \geq 0 \end{array}$$

possiamo enunciare il Teorema degli scarti complementari come segue:

Teorema. Date due soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ ammissibili rispettivamente per (P) e (D), esse sono ottime se e solo se verificano la condizione degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, la condizione degli scarti complementari è equivalente al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Per il problema in esame si ha:

$$(P)\quad \begin{array}{rrcrcl}
\max & 3x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & -x_1 & - & 2x_2 & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 4
\end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\min & 4y_1 & + & 2y_2 & + & 2y_3 & + & 2y_4 & + & 4y_5 & & \\
 & y_1 & + & y_2 & - & y_3 & & & + & y_5 & = & 3 \\
 & 2y_1 & & & - & 2y_3 & + & y_4 & - & y_5 & = & 1 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \geq & 0.
\end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{x} = (2, -2)$ è ammissibile per (P). L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \dots, m\} : b_i - A_i\bar{x} = 0\} = \{2, 3, 5\}$. Segue che una soluzione duale $\bar{y}$, tale che $\bar{y}A = c$, che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $\bar{y}_1 = \bar{y}_4 = 0$. Affinché $\bar{y}$ sia ammissibile per (D), essa deve soddisfare il seguente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl}
y_2 & - & y_3 & + & y_5 & = & 3 \\
 & - & 2y_3 & - & y_5 & = & 1 \\
y_2, & & y_3, & & y_5 & \geq & 0.
\end{array} \right.$$

Tale sistema non ammette soluzioni. La seconda equazione infatti è a coefficienti negativi e termine noto positivo, non può quindi ammettere soluzioni a valori tutti non negativi. Perciò, non esiste alcuna soluzione ammissibile per il problema (D) che verifichi gli scarti complementari con $\bar{x}$, che pertanto non è una soluzione ottima per (P).

8) Si consideri il seguente problema di PL, parametrico rispetto al parametro α:

$$\begin{array}{lccccccl} \max & x_1 & + & 2x_2 & + & \alpha x_3 & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq 2 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

Assumendo $\alpha = 1$, si determini una soluzione ottima del problema, utilizzando il Teorema degli scarti complementari. Si indichi quindi per quali valori di α la soluzione trovata resta ottima. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Consideriamo il duale del problema di PL:

$$\begin{array}{lrcl} \min & 2y & & \\ & 2y & \geq & 1 \\ & y & \geq & 2 \\ & 2y & \geq & \alpha \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Se $\alpha = 1$, è immediato verificare che la soluzione ottima duale risulta essere $\bar{y} = 2$. Dalle condizioni degli scarti complementari relative alla coppia simmetrica, essendo il primo ed il terzo vincolo del duale non attivi, in una qualsiasi soluzione ottima primale deve essere $x_1 = x_3 = 0$. Segue che (l'unica) soluzione ottima primale, $\bar{x}$, è tale che $\bar{x}_1 = \bar{x}_3 = 0$, mentre $\bar{x}_2 = 2$.

Al variare di α, $\bar{x}$ rimane ottima fintanto che $\bar{y} = 2$ resta una soluzione ottima duale; questo si verifica se e solo se $\max\{1/2, 2, \alpha/2\} = 2$, quindi per $\alpha \leq 4$.

9) Si consideri il seguente problema di PL, in cui γ è un parametro reale:

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & (-1-\gamma)x_1 & + & (-1+2\gamma)x_2 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & -1.
\end{array}
$$

Si individui l'insieme di valori di γ per cui $B = \{4, 5\}$ è una base ottima per tale problema, giustificando la risposta. Si consideri quindi la seguente variante del problema, in cui $\gamma = 0$ e α è un ulteriore parametro reale:

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & -x_1 & - & x_2 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 4-2\alpha \\
 & x_1 & & & \leq & 2-\alpha \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 1+\alpha \\
 & & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & -1.
\end{array}
$$

Si individui l'insieme di valori di α per cui $B = \{4, 5\}$ è una base ottima per questo secondo problema.

SVOLGIMENTO

Consideriamo il primo problema di PL e calcoliamo la soluzione di base primale corrispondente a $B = \{4, 5\}$:

$$
A_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

È immediato verificare che tale soluzione è primale ammissibile, in quanto soddisfa i primi tre vincoli del problema. Calcoliamo ora la corrispondente soluzione di base duale in funzione del parametro γ:

$$
y_B = \begin{bmatrix} (-1-\gamma) & (-1+2\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\gamma & 1+\gamma \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3\gamma & 1+\gamma \end{bmatrix}.
$$

$B = \{4, 5\}$ è una base duale ammissibile se e solo se $y_B \geq 0$, vale a dire se e solo se $\gamma \in [-1, 0]$. Quindi, $B = \{4, 5\}$ è una base ottima per il primo problema di P.L. se e solo se $\gamma \in [-1, 0]$.

Consideriamo ora il secondo problema. La base $B = \{4, 5\}$ è una base duale ammissibile per tale problema, in quanto il vettore dei costi di tale problema si ottiene dal vettore dei costi del problema di PL precedentemente considerato fissando $\gamma = 0$. La soluzione di base primale corrispondente a $B = \{4, 5\}$ è $x = (1, 0)$, come nel caso precedente. Tale soluzione è primale ammissibile se e solo se essa soddisfa anche i vincoli fuori base, vale a dire i primi tre vincoli del problema. È immediato verificare che ciò accade se e solo se $\alpha \in [0, 1]$. Quindi, $B = \{4, 5\}$ è una base ottima per il secondo problema se e solo se $\alpha \in [0, 1]$.

10) Si consideri il seguente problema di PL:

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & \\
 & x_1 & + & \beta x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\
 & \gamma x_1 & - & x_2 & & & \leq & 3 \\
 & -\alpha x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 0 \\
 & x_1 & + & \alpha x_2 & - & \beta x_3 & \leq & 4
\end{array}
$$

Si determinino tutte le terne di valori dei parametri α, β e γ per i quali $\bar{x} = (1, 1, 0)$ e $\bar{y} = (0, 1, 2, 0)$ sono rispettivamente una soluzione ottima del problema e del suo duale. Tra le terne così individuate si determini per quali di esse il problema duale ammette una soluzione ottima $\hat{y}$ tale che $\hat{y}_1 > 0$. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Consideriamo il problema dato ed il suo duale:

$$
(P)\quad
\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & \\
 & x_1 & + & \beta x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\
 & \gamma x_1 & - & x_2 & & & \leq & 3 \\
 & -\alpha x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 0 \\
 & x_1 & + & \alpha x_2 & - & \beta x_3 & \leq & 4
\end{array}
\qquad
(D)\quad
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\min & 5y_1 & + & 3y_2 & & & + & 4y_4 & & \\
 & y_1 & + & \gamma y_2 & - & \alpha y_3 & + & y_4 & = & 2 \\
 & \beta y_1 & - & y_2 & + & y_3 & + & \alpha y_4 & = & 1 \\
 & y_1 & & & + & 2y_3 & - & \beta y_4 & = & 4 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0.
\end{array}
$$

L' ottimalità della coppia di soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ garantisce che esse soddisfano le condizioni degli scarti complementari: essendo $\bar{y}_2, \bar{y}_3 \neq 0$, i corrispondenti vincoli del problema primale devono essere attivi in $\bar{x}$; abbiamo quindi:

$$\gamma - 1 = 3, \quad -\alpha + 1 = 0,$$

da cui si deduce $\gamma = 4$ e $\alpha = 1$. Affinché $\bar{x}$ sia ammissibile per il problema primale, i rimanenti vincoli devono essere soddisfatti:

$$1 + \beta \leq 5, \quad 1 + \alpha \leq 4.$$

Poiché $\alpha = 1$, la seconda disugualianza è verificata mentre la prima vale quando $\beta \leq 4$. Infine, posti $\gamma = 4$ e $\alpha = 1$, la soluzione $\bar{y}$ è ammissibile per il problema duale per qualsiasi valore di β. Pertanto, $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono rispettivamente una soluzione ottima del problema dato e del suo duale se e solo se $\alpha = 1$, $\beta \leq 4$ e $\gamma = 4$.

Una qualsiasi soluzione ottima $\hat{y}$ del problema duale deve costituire una coppia di soluzioni complementari con qualsiasi soluzione ottima del problema primale, in particolare con $\bar{x}$. Affinché risulti $\hat{y}_1 > 0$, il primo vincolo del problema primale deve essere attivo in $\bar{x}$ e pertanto deve risultare $\beta = 4$. Possiamo quindi limitarci a considerare il caso $\alpha = 1$, $\beta = 4$ e $\gamma = 4$, nel quale risulta $I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \dots, m\} : A_i \bar{x} = b_i\} = \{1, 2, 3\}$. Di conseguenza, in questo caso l'insieme delle soluzioni ottime del problema duale è costituito dalle soluzioni del seguente sistema:

$$
\left\{
\begin{array}{rcrcrcrcl}
y_1 & + & 4y_2 & - & y_3 & + & y_4 & = & 2 \\
4y_1 & - & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = & 1 \\
y_1 & & & + & 2y_3 & - & 4y_4 & = & 4 \\
 & & & & & & y_4 & = & 0 \\
y_1, & & y_2, & & y_3 & & & \geq & 0.
\end{array}
\right.
$$

Tale sistema ammette $\bar{y} = (0, 1, 2, 0)$ come unica soluzione (il determinante della matrice dei coefficienti del sistema di equazioni è diverso da zero), pertanto non esiste alcuna terna di valori dei parametri per cui il problema duale ammetta una soluzione ottima $\hat{y}$ tale che $\hat{y}_1 > 0$.

11) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rrrrr} \max & & - & x_2 & & \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ & -x_1 & & & \leq & -1 \\ & -x_1 & - & 2x_2 & \leq & -1 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{2, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1) $$B = \{2,4\},\ \ A_B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ \ A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},\ \ x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$y_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix},\ \ y_N = 0,\ \ y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$h = \min\{i \in B : y_i < 0\} = 2,\ \ B(h) = 1,$$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \ J = \{i \in N : A_i \xi > 0\} = \{3, 5\},$$

$$\lambda_i = (b_i - A_i x)/A_i \xi,\ \ \lambda_3 = 3,\ \ \lambda_5 = 3, \bar{\lambda} = \min\{\lambda_3, \lambda_5\} = 3,$$

$$k = \min\{i \in J : \lambda_i = \bar{\lambda}\} = \min\{3, 5\} = 3 \text{ [regola anticiclo di Bland]}$$

it.2) $$B = \{3,4\},\ \ A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ \ A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ \ x = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix},\ \ y_N = 0,\ \ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ \ h = 4,\ \ B(h) = 2,$$

$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix},\ \ J = \{5\},\ \ \bar{\lambda} = \lambda_5 = 0,\ \ k = 5$ [cambio di base degenere]

it.3) $$B = \{3,5\},\ \ A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},\ \ A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ \ x = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix},\ \ y_N = 0,\ \ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \ h = 3,\ \ B(h) = 1,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix},\ \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix},\ \ \text{STOP.}$$

Poiché $A_N \xi \leq 0$, il problema è superiormente illimitato ed il suo duale è vuoto.

12) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{lrcrcr}
\max & x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & -x_1 & & & \leq & 1 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
 & & & x_2 & \leq & 4
\end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{1,2\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$y_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}, \ y_N = 0, \ y = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$h = \min\{i \in B : y_i < 0\} = \min\{1,2\} = 1, \quad B(h) = 1, \ \text{[regola anticiclo di Bland]}$$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ J = \{i \in N : A_i \xi > 0\} = \{3,4,5\},$$

$$\lambda_i = (b_i - A_i x)/A_i \xi, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 2, \quad \lambda_5 = 4, \quad \bar{\lambda} = \min\{\lambda_i \ : \ i \in J\} = 0,$$

$$k = \min\{i \in J : \lambda_i = \bar{\lambda}\} = 3 \ \ \text{[cambio di base degenere]}$$

it.2) $B = \{2,3\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$y_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}, \ y_N = 0, \ y = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ h = 2, \ B(h) = 1,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$J = \{4,5\}, \quad \bar{\lambda} = \lambda_4 = \lambda_5 = 4, \quad k = \min\{4,5\} = 4 \ \text{[regola anticiclo di Bland]}$$

it.3) $B = \{3,4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$$y_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \end{bmatrix}, \ y_N = 0, \ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \ h = 3, \ B(h) = 1,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$J = \{5\}, \quad \bar{\lambda} = \lambda_5 = 0, \quad k = 5 \ \text{[cambio di base degenere]}$$

it.4) $B = \{4,5\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$$y_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}, \ y_N = 0, \ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \ h = 4, \ B(h) = 1,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{STOP.}$$

Poiché $A_N \xi \leq 0$, il problema dato è superiormente illimitato e di conseguenza il suo duale è vuoto.

13) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max & & & x_2 & & \\
& x_1 & & & \leq & 2 \\
& 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
& x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
& & & x_2 & \leq & 4 \\
& -x_1 & & & \leq & 1 \\
& & & -x_2 & \leq & 0
\end{array}
$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito, si discuta se la soluzione ottima individuata sia unica, giustificando la risposta.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{1, 2\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix},$

$$y_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$h = \min\{i \in B : y_i < 0\} = 1, \quad B(h) = 1$$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$J = \{i \in N : A_i \xi > 0\} = \{3, 4, 5\}, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 1, \quad \lambda_5 = 3,$$

$$\bar{\lambda} = \min\{\lambda_i \ : \ i \in J\} = 0, \quad k = \min\{i \in J : \lambda_i = \bar{\lambda}\} = 3 \quad \text{[cambio di base degenere]}$$

it.2) $B = \{2, 3\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix},$

$$y_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = 2, \quad B(h) = 1,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

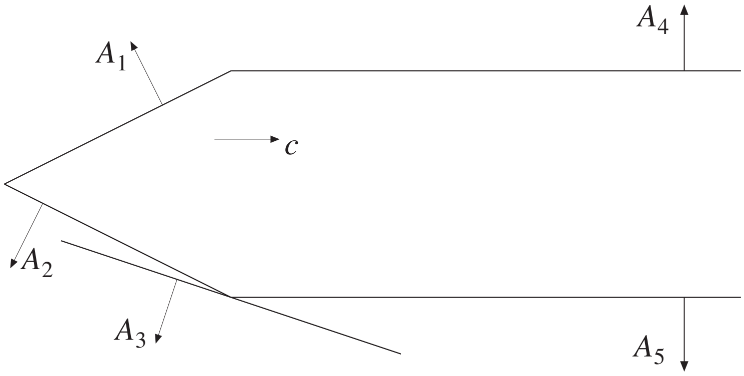
$$J = \{4, 5\}, \quad \lambda_4 = 2, \quad \lambda_5 = 3, \quad \bar{\lambda} = 2, \quad k = 4$$

it.3) $B = \{3, 4\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix},$

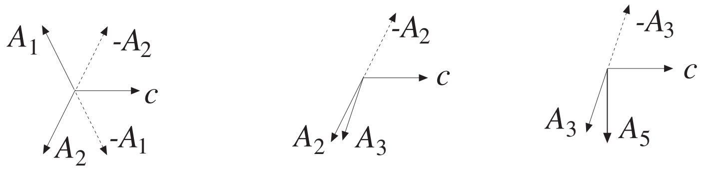
$$y_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{STOP.}$$

Poiché $y_B \geq 0$, la soluzione $x = (0, 4)$ è ottima per (P), mentre la soluzione $y = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$ è ottima per (D). Osserviamo che la soluzione ottima duale individuata dall'algoritmo è degenere in quanto $y_3 = 0$. Consideriamo allora la direzione $\xi = -A_B^{-1} u_{B(3)} = (-1, 0)$. Per via della degenerazione duale, abbiamo $c\xi = -y_3 = 0$. Nel caso ξ risulti una direzione ammissibile, la soluzione ottima primale individuata dall'algoritmo non è unica, in quanto effettuando uno spostamento lungo ξ il valore ottimo risulta invariato. In effetti, ξ è una direzione ammissibile in quanto il massimo passo di spostamento lungo tale direzione è $\bar{\lambda} = 1$. Quindi, $x = (0, 4)$ non è l'unica soluzione ottima di (P).

14) Si risolva geometricamente il problema di PL (di massimizzazione) in figura, mediante l'algoritmo del Simplesso Primale, partendo dalla base $B = \{1, 2\}$. Ad ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base, i segni delle variabili duali di base, l'indice uscente, la direzione di crescita individuata e l'indice entrante, giustificando le risposte.



SVOLGIMENTO



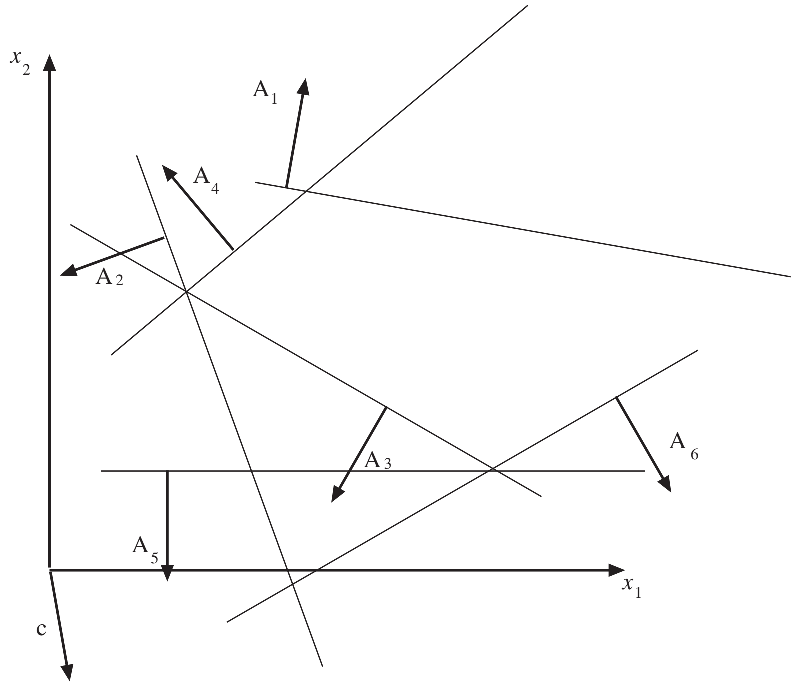
a) b) c)

Alla prima iterazione, la soluzione primale è x^1 mostrata in figura. Si ha $y_1 < 0$ e $y_2 < 0$ (c appartiene al cono generato da $-A_1$ e $-A_2$, come mostrato in a)), quindi sono candidati ad uscire dalla base sia l'indice 1 che l'indice 2: per la regola anticiclo di Bland $h = 1$. Il massimo passo ammissibile lungo la direzione ξ^1, mostrata in figura, rende attivi sia il vincolo 3 che il vincolo 5: per la regola anticiclo di Bland si ha quindi $k = 3$.

La base alla seconda iterazione è $B = \{2, 3\}$, a cui corrisponde la soluzione x^2 mostrata in figura: si ha $y_2 < 0$ e $y_3 > 0$ (c appartiene al cono generato da $-A_2$ e A_3, come mostrato in b)) e quindi $h = 2$. Lungo la direzione ξ^2 mostrata in figura si effettua un passo degenere (di lunghezza nulla) e si ha $k = 5$.

La base alla terza iterazione è $B = \{3, 5\}$, si ha $x^3 = x^2$ come mostrato in figura: si ha $y_3 < 0$ e $y_5 > 0$ (c appartiene al cono generato da $-A_3$ e A_5, come mostrato in c)) e quindi $h = 3$. Qualsiasi passo $\lambda \geq 0$ lungo la direzione ξ^3 mostrata in figura produce una soluzione ammissibile, ossia ξ^3 è una direzione ammissibile di crescita illimitata: infatti, è facile verificare geometricamente che $A_i\xi^3 \leq 0$ per $i = 1, \ldots, 5$. L'algoritmo termina dichiarando che il problema è superiormente illimitato, e il suo duale è vuoto.

15) Si risolva geometricamente per mezzo dell'algoritmo primale del simplesso il problema di PL di figura. Si usi come base di partenza $B = \{1, 4\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base e il segno delle variabili duali. Indicare poi, se ce ne sono, quali fra le soluzioni trovate sono degeneri.



SVOLGIMENTO

it.1) $B_1 = \{1, 4\}$, $y_1 < 0$, $y_4 < 0$, $h = 1$.

it.2) $B_2 = \{2, 4\}$, $y_2 > 0$, $y_4 < 0$, $h = 4$.

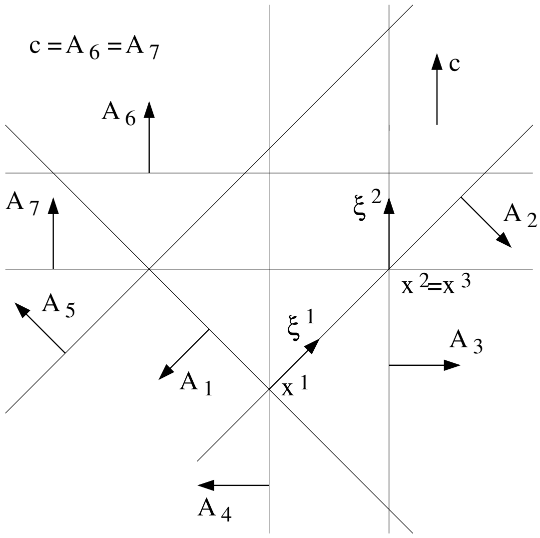
it.3) $B_3 = \{2, 3\}$, $y_2 < 0$, $y_3 > 0$, $h = 2$.

it.4) $B_4 = \{5, 3\}$, $y_5 > 0$, $y_3 < 0$, $h = 3$.

it.5) $B_5 = \{5, 6\}$, $y_5 > 0$, $y_6 > 0$, STOP.

Le basi B_2, B_3, B_4, B_5 sono primali degeneri mentre nessuna base risulta essere duale degenere.

16) Si risolva geometricamente per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale il problema di P.L. in figura, partendo dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, il segno delle variabili duali in base e gli indici uscente ed entrante, e si riportino sulla figura la soluzione primale e la direzione di spostamento, giustificando le risposte.



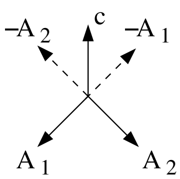
SVOLGIMENTO

it. 1) $B_1 = \{1, 2\}$, $y_1 < 0$, $y_2 < 0$ (in quanto c appartiene al cono finitamente generato da $-A_1$ e $-A_2$, come mostrato in figura (a)), $h = \min\{1, 2\} = 1$ (regola anticiclo di Bland), $k = \min\{3, 7\} = 3$ (regola anticiclo di Bland).

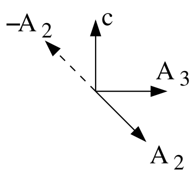
it. 2) $B_2 = \{3, 2\}$, $y_3 > 0$, $y_2 < 0$ (in quanto c appartiene al cono finitamente generato da A_3 e $-A_2$, come mostrato in figura (b)), $h = 2$, $k = 7$ (cambio di base degenere).

it. 3) $B_3 = \{3, 7\}$, $y_3 = 0$, $y_7 = 1$ (in quanto $c = A_7$), STOP.

La soluzione primale x^3 in figura è ottima.



(a)



(b)

17) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{lrcrcr}
\max & & & x_2 & & \\
 & & & x_2 & \leq & 4 \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\
 & -x_1 & & & \leq & 1 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & -x_1 & & & \leq & 0
\end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

$$\text{it. 1) } B = \{1,2\}\text{: } A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$k = \min\{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\} = \min\{3, 4, 5\} = 3 \text{ [regola anticiclo di Bland]},$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\theta} = \min\{\bar{y}_i / \eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0\} = 0, \quad h = \min\{i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i\} = 2 \text{ [cambio di base degenere]}.$$

$$\text{it. 2) } B = \{1,3\}\text{: } \quad A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = \min\{4, 5\} = 4 \text{ [regola anticiclo di Bland]},$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = \min\{1, 0\} = 0, \quad h = 3 \text{ [cambio di base degenere]}.$$

$$\text{it. 3) } B = \{1,4\}\text{: } \quad A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{STOP.}$$

$B = \{1, 4\}$ è una base ottima: $\bar{x} = (0, 4)$ è una soluzione ottima per il problema primale, mentre $\bar{y} = (1, 0, 0, 0, 0)$ è una soluzione ottima per il problema duale.

18) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & & & & \\ & & - & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & & & \leq & 0 \\ & -x_1 & & & \leq & 1 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

$$\text{it. 1) } B = \{1,3\}\text{: } A_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_B = c A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$k = \min\{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\} = \min\{2, 4\} = 2 \text{ [regola anticiclo di Bland]},$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = \min\{\bar{y}_i / \eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0\} = \min\{1/2, 1\} = 1/2,$$

$$h = \min\{i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i\} = 1.$$

$$\text{it. 2) } B = \{2,3\}\text{: } \quad A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k = 4,$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \bar{\theta} = \min\{1, 1\} = 1,\ h = \min\{2, 3\} = 2 \text{ [regola anticiclo di Bland]}.$$

$$\text{it. 3) } B = \{3,4\}\text{: } \quad A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{STOP.}$$

$B = \{3, 4\}$ è una base ottima: $\bar{x} = (0, 2)$ è una soluzione ottima per il problema primale, mentre $\bar{y} = (0, 0, 0, 1, 0)$ è una soluzione ottima per il problema duale.

19) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rrcrcr}
\max & x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \\
 & -x_1 & & & \leq & 0 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2
\end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{3,4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice entrante h, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{3,4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad k = \min\{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\} = 1,$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = \min\{\bar{y}_i/\eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0\} = \min\{1, 2/2\} = 1,$$

$$h = \min\{i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i/\eta_i\} = \min\{3,4\} = 3.$$

it.2) $B = \{1,4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad k = \min\{2,5\} = 2,$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = 0, \quad h = 4.$$

it. 3) $B = \{1,2\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$,

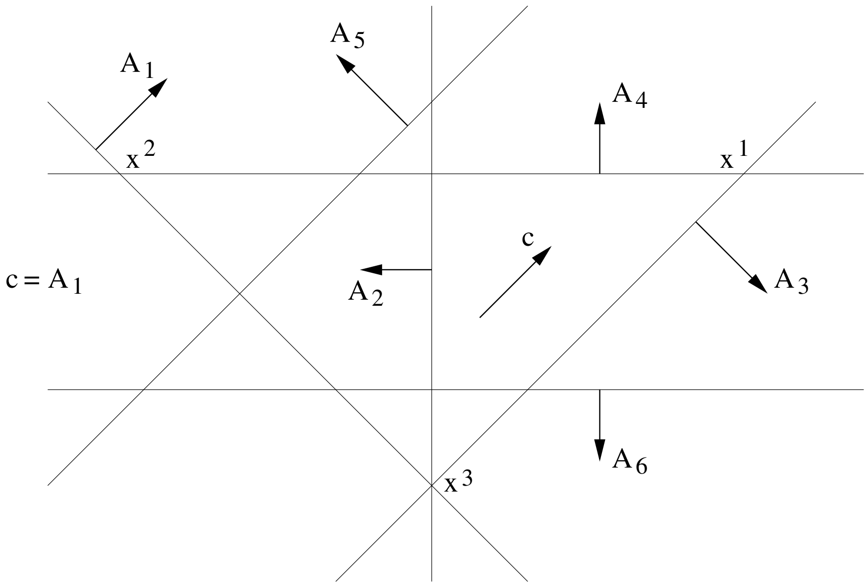
$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$\bar{x}$ è ammissibile e quindi l'algoritmo termina.

$B = \{1,2\}$ è una base ottima con $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ le relative soluzioni ottime.

20) Si risolva graficamente il problema di P.L. indicato in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori $\overline{y}_B$ e η_B, l'indice uscente h, giustificando le risposte.



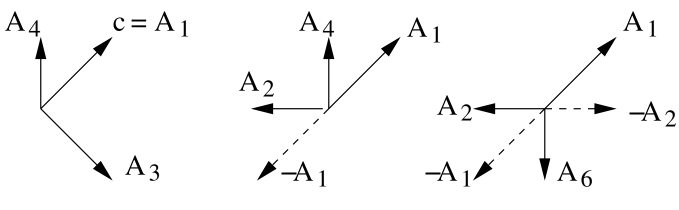
SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{3, 4\}$, $k = 1$, $y_3 = \eta_3 > 0$, $y_4 = \eta_4 > 0$ (in quanto $c = A_1$ appartiene al cono finitamente generato da A_3 e A_4, come mostrato in figura (a)), $h = \min\{3, 4\} = 3$ (regola anticiclo di Bland).

it. 2) $B = \{1, 4\}$, $k = \min\{2, 5\} = 2$ (regola anticiclo di Bland), $y_1 = 1 > 0$, $y_4 = 0$ (in quanto $c = A_1$), $\eta_1 < 0$, $\eta_4 > 0$ (in quanto A_2 appartiene al cono finitamente generato da $-A_1$ e A_4, come mostrato in figura (b)), $h = 4$.

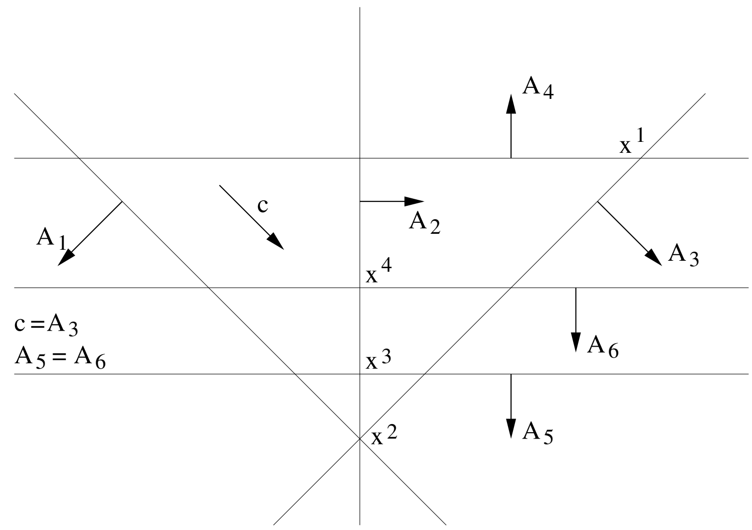
it. 3) $B = \{1, 2\}$, $k = 6$, $y_1 = 1$, $y_2 = 0$ (in quanto $c = A_1$), $\eta_1 < 0$, $\eta_2 < 0$ (in quanto c appartiene al cono finitamente generato da $-A_1$ e $-A_2$, come mostrato in figura (c)), STOP.

Il problema duale è inferiormente illimitato e conseguentemente il problema primale è vuoto.



(a) (b) (c)

21) Si risolva graficamente il problema di P.L. indicato in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori $\overline{y}_B$ e η_B, l'indice uscente h, giustificando le risposte.



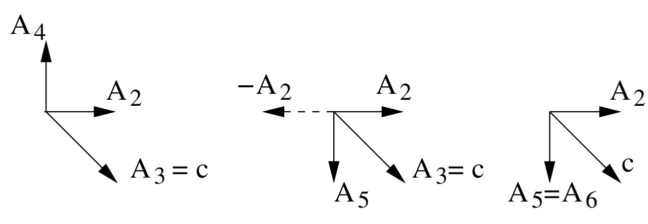
SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{3, 4\}$, $k = 2$, $y_3 = 1$, $y_4 = 0$ (in quanto $c = A_3$), $\eta_3 > 0$, $\eta_4 > 0$ (in quanto A_2 appartiene al cono finitamente generato da A_3 e A_4, come mostrato in figura (a)), $h = 4$.

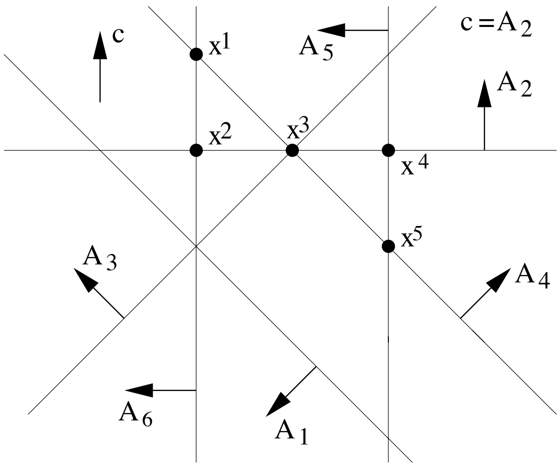
it. 2) $B = \{3, 2\}$, $k = \min\{5, 6\} = 5$ (regola anticiclo di Bland), $y_3 = 1$, $y_2 = 0$ (in quanto $c = A_3$), $\eta_3 > 0$, $\eta_2 < 0$ (in quanto A_5 appartiene al cono finitamente generato da A_3 e $-A_2$, come mostrato in figura (b)), $h = 3$.

it. 3) $B = \{5, 2\}$, $k = 6$, $y_5 > 0$, $y_2 > 0$ (in quanto c appartiene al cono finitamente generato da A_5 e A_2, come mostrato in figura (c)), $\eta_5 = 1$, $\eta_2 = 0$ (in quanto $A_6 = A_5$), $h = 5$.

it. 4) $B = \{6, 2\}$, STOP in quanto x^4 è una soluzione ammissibile e quindi ottima per il problema primale.



22) Si risolva graficamente il problema di PL indicato in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{4, 6\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori y_B e η_B, l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.



SVOLGIMENTO

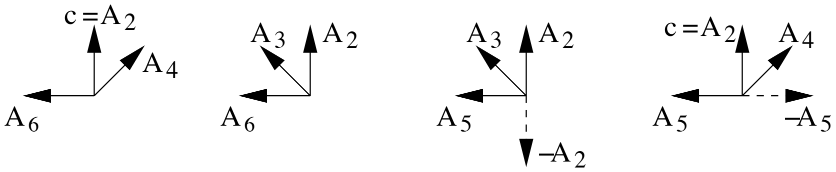
it. 1) $B = \{4, 6\}$, x^1 viola i vincoli 2, 3 e 5 da cui $k = \min\{2, 3, 5\} = 2$ (regola anticiclo di Bland), $y_4 > 0$, $y_6 > 0$ in quanto $c \in \text{int cono}(A_4, A_6)$ (figura (a)). La base è duale non degenere ($y_4, y_6 \neq 0$) e primale non degenere ($I(x^1) = \{4, 6\}$). Poiché $c = A_2$, risultano $\eta_4 = y_4 > 0$ e $\eta_6 = y_6 > 0$, quindi $h = \min\{4, 6\} = 4$ (regola anticiclo di Bland).

it. 2) $B = \{2, 6\}$, x^2 viola i vincoli 3 e 5 da cui $k = \min\{3, 5\} = 3$ (regola anticiclo di Bland), $y_2 = 1$, $y_6 = 0$ in quanto $c = A_2$. La base è duale degenere ($y_6 = 0$), ma primale non degenere ($I(x^2) = \{2, 6\}$). Poiché $A_3 \in \text{int cono}(A_2, A_6)$ (figura (b)), risultano $\eta_2 > 0$, $\eta_6 > 0$, da cui $y_6/\eta_6 = 0 < y_2/\eta_2$ e quindi $h = 6$.

it. 3) $B = \{2, 3\}$, x^3 viola il vincolo 5 da cui $k = 5$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$ in quanto $c = A_2$. La base è duale degenere ($y_3 = 0$) e primale degenere ($I(x^3) = \{2, 3, 4\}$). Poiché $A_5 \in \text{int cono}(-A_2, A_3)$ (figura (c)), risultano $\eta_2 < 0$, $\eta_3 > 0$ e quindi $h = 3$.

it. 4) $B = \{2, 5\}$, x^4 viola il vincolo 4 da cui $k = 4$, $y_2 = 1$, $y_5 = 0$ in quanto $c = A_2$. La base è duale degenere ($y_5 = 0$) ma primale non degenere ($I(x^4) = \{2, 5\}$). Poiché $A_4 \in \text{int cono}(A_2, -A_5)$ (figura (d)), risultano $\eta_2 > 0$, $\eta_5 < 0$ e quindi $h = 2$.

it. 5) $B = \{4, 5\}$, x^5 è una soluzione ammissibile per il problema primale e quindi ottima. La base è primale non degenere ($I(x^5) = \{4, 5\}$) e duale non degenere ($y_4 > 0$ e $y_5 > 0$ poiché $c \in \text{int cono}(A_4, A_5)$ (figura (d))).



(a) (b) (c) (d)

23) Il professore di Ricerca Operativa ha preparato un esercizio di Programmazione Lineare per il compito del prossimo 30 Giugno. Purtroppo, ha sbadatamente dimenticato il foglio con il testo e la soluzione dell'esercizio nel taschino della camicia, che ha poi lavato in lavatrice. Una volta recuperato ed asciugato il foglio, la maggior parte del testo e della soluzione risulta completamente illeggibile. Il professore riesce comunque a leggere che una soluzione ottima del problema primale è $\bar{x} = (1, 1, 0)$ e che una soluzione ottima del problema duale è $\bar{y} = (2, 0, 0, 1)$ ma non è altrettanto fortunato con la formulazione del problema. Con grande fatica riesce soltanto a decifrare i seguenti dati parziali:

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
\max & 5x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\
 & & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 3 \\
 & & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 0 \\
 & -x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 2.
\end{array}
$$

Mentre la funzione obiettivo è completa, i vincoli individuati sono incompleti ed altri mancano completamente. Utilizza le tue conoscenze di Programmazione Lineare per aiutare il professore a recuperare l'esercizio, individuando una formulazione completa del problema primale che sia compatibile con i dati disponibili. Giustificare la risposta.

SVOLGIMENTO

Poiché $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ e $\bar{y} \in \mathbb{R}^4$, il problema primale ha 3 variabili e 4 vincoli: una sua possibile formulazione è pertanto data da

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
\max & 5x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\
 & a_{11}x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 3 \\
 & a_{21}x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 0 \\
 & -x_1 & + & a_{32}x_2 & + & 2x_3 & \leq & 2 \\
 & a_{41}x_1 & + & a_{42}x_2 & + & a_{43}x_3 & \leq & b_4
\end{array}
$$

dove i valori dei coefficienti a_{11}, a_{21}, a_{32}, a_{41}, a_{42}, a_{43} e b_4 non sono noti e vanno determinati.

Essendo $\bar{x}$ e $\bar{y}$ una coppia di soluzioni ottime, il teorema della dualità forte garantisce $c\bar{x} = \bar{y}b$: abbiamo quindi $4 = c\bar{x} = \bar{y}b = 6 + b_4$, da cui si deduce $b_4 = -2$. Inoltre, l' ottimalità della coppia di soluzioni garantisce anche che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ soddifano le condizioni degli scarti complementari. In particolare, essendo $\bar{y}_1, \bar{y}_4 \neq 0$, i corrispondenti vincoli del problema primale devono essere attivi in $\bar{x}$; abbiamo quindi:

$$a_{11} + 1 = 3, \quad a_{41} + a_{42} = b_4 = -2.$$

Dalla prima uguaglianza si deduce $a_{11} = 2$.

Essendo $\bar{y}$ ammissibile per il problema duale, devono valere le seguenti uguaglianze:

$$2a_{11} + a_{41} = 5, \quad 2 + a_{42} = -1, \quad -2 + a_{43} = 1.$$

Dalla seconda e dalla terza uguaglianza si deducono immediatamente i valori $a_{42} = -3$ e $a_{43} = 3$. Poiché $a_{11} = 2$, dalla prima uguaglianza si deduce $a_{41} = 1$. Conseguentemente, anche la condizione $a_{41} + a_{42} = -2$ è verificata.

Essendo $\bar{x}$ ammissibile, anche il secondo ed il terzo vincolo devono essere soddisfatti da $\bar{x}$: abbiamo quindi $a_{21} + 1 \leq 0$ e $-1 + a_{32} \leq 2$, da cui $a_{21} \leq -1$ e $a_{32} \leq 3$.

Scegliendo, ad esempio, $a_{21} = -1$ e $a_{32} = 3$, una formulazione del problema primale compatibile con i dati recuperati è data da

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
\max & 5x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\
 & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 3 \\
 & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 0 \\
 & -x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 2 \\
 & x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & \leq & -2.
\end{array}
$$