

## RICERCA OPERATIVA (a.a. 2021/22)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda a) (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande b), c), d) e si risponda alla domanda finale e).

1) Per affrontare la gravissima emergenza causata dalla guerra interplanetaria scatenata da *Tyrann* contro *Langane*, l'*Unione dei Mondi* ha chiesto il supporto dell'*Associazione Umanitaria Intergalattica* per preparare pasti preconfezionati con deperibilità a 4 settimane da distribuire ai profughi spaziali. L'Unione ha stimato la necessità di  $D_h$  pasti per ciascuna settimana  $h$  della fase acuta della crisi. Per predisporre un piano di aiuto alimentare articolato su 27 settimane, l'associazione può contare sul supporto di 68 aziende alimentari consociate. A ciascuna azienda è stato chiesto di dichiarare il proprio fabbisogno economico e garantire conseguenti livelli di produzione: l'azienda  $i$  necessita di un finanziamento di  $f_i$  apolli d'oro per avviare la produzione mentre il costo di un singolo pasto sarà  $c_{ih}$  nella settimana  $h$  del piano, per il quale può garantire fino a  $d_{ih}$  pasti. Da parte sua, nelle stesse settimane, l'associazione è in grado di produrre autonomamente nei propri stabilimenti fino a  $m_h$  pasti al costo di  $c_h$  apolli ciascuno e stima di ricevere donazioni per un ammontare complessivo settimanale di  $R_h$  apolli.

Aiuta l'Associazione Umanitaria Intergalattica a predisporre il piano di aiuto alimentare, formulando in termini di P.L.I. il problema di stabilire quanti pasti produrre, quali aziende coinvolgere e quante pasti far produrre a ciascuna in ogni settimana del piano nel rispetto delle capacità produttive in modo da minimizzare il costo complessivo al netto delle donazioni ricevute.

Scelte le famiglie di variabili

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{se l'azienda } i \text{ viene coinvolta,} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$x_{ih} = \text{numero di pasti richiesti all'azienda } i \text{ nella settimana } h,$$

$$y_h = \text{numero di pasti prodotti nei propri stabilimenti nella settimana } h,$$

$$i = 1, \dots, 68, h = 1, \dots, 27$$

parte della formulazione è data dai vincoli riportati qua sotto:

min

$$y_h \leq m_h \quad h = 1, \dots, 27$$

$$x_{ih}, y_h \in \mathbb{Z}_+, z_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 68, h = 1, \dots, 27.$$



a) Selezionare tra le funzioni obiettivo ed i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare **correttamente** la formulazione.

**A**  $\sum_{h=1}^{27} \left( c_h y_h + \sum_{i=1}^{68} (c_{ih} x_{ih} + f_i z_i) - R_h \right)$  (funzione obiettivo)

non aggiungere

**B**  $\sum_{h=1}^{27} \left( c_h y_h + \sum_{i=1}^{68} c_{ih} x_{ih} \right) + \sum_{i=1}^{68} f_i z_i$  (funzione obiettivo)

aggiungere

**C**  $\sum_{h=1}^{27} \left( (c_h - R_h) y_h + \sum_{i=1}^{68} (c_{ih} x_{ih} + f_i z_i) \right)$  (funzione obiettivo)

non aggiungere

**D**  $x_{ih} \leq d_{ih} z_i \quad i = 1, \dots, 68, h = 1, \dots, 27$

aggiungere

**E**  $y_h + x_{ih} \leq m_h + d_{ih} \quad i = 1, \dots, 68, h = 1, \dots, 27$

non aggiungere

**F**  $\sum_{k=a_h}^h \left( y_k + \sum_{i=1}^{68} x_{ik} \right) \geq \sum_{k=a_h}^h D_k \quad a_h = \max\{1, h-3\}, h = 1, \dots, 27$

aggiungere

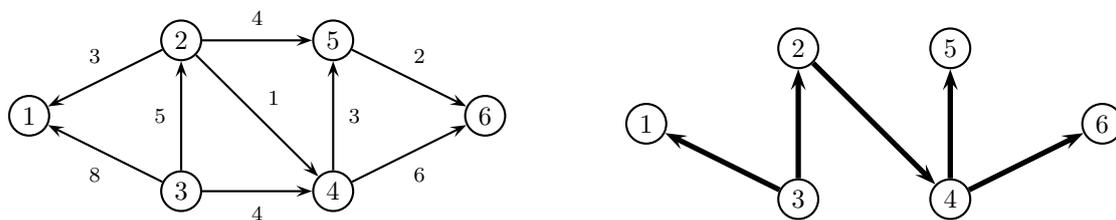
**G**  $y_h + x_{ih} \geq D_h \quad i = 1, \dots, 68, h = 1, \dots, 27$

non aggiungere

**H**  $y_h + \sum_{i=1}^{68} x_{ih} z_i \geq D_h \quad h = 1, \dots, 27$

non aggiungere

2) Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 3 sul grafo di sinistra:



a) Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

**A**  $d = (0, 5, 8, 6, 9, 12)$  è il vettore delle etichette relative all'albero

falso

**B** Il costo dell'albero è 40

vero

b) Quale coppia di archi non soddisfano le corrispondenti condizioni di Bellman?

**I** (3, 4), (5, 6)

**II** (1, 2), (3, 4)

**III** (2, 5), (5, 6)

c) Quali archi bisogna sostituire nell'albero con quelli scelti al punto b) per ottenere un albero dei cammini minimi?

**I** (1, 3), (2, 4)

**II** (4, 5), (4, 6)

**III** (2, 4), (4, 6)

d) Qual è il costo del cammino minimo dalla radice al nodo 6?

**I** 10

**II** 12

**III** 9

e) Modificare il costo del minor numero possibile di archi affinché l'albero a destra sia l'unico albero dei cammini minimi. Giustificare la risposta

$c_{23} > 5, c_{34} > 6$  e  $c_{56} > 3$  garantiscono che tutte le condizioni di Bellman sono soddisfatte come disuguaglianze

esistono altre scelte corrette

3) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare ed il suo problema duale (D):

$$\begin{array}{rcll}
 \max & & \alpha x_2 & \\
 (P) & x_1 + x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 - x_2 & \leq & 1 \\
 & -x_1 + x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & \leq & 2 \\
 & & x_2 & \leq 2
 \end{array}$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

**A** Se  $\alpha > 0$ , allora (P) è superiormente illimitato

falso

**B**  $\bar{x} = (2, 1)$  e  $\bar{y} = (\alpha, 0, 0, -\alpha, 0)$  soddisfano la condizione degli scarti complementari

vero

b) Se  $\alpha = 1$ , qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (P)?

**I**  $\{(2, 1)\}$

**II**  $\{(t, 2) : -2 \leq t \leq 1\}$

**III**  $\{(2, 2)\}$



ed il seguente metodo “Branch and Bound”: la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta applicando l’algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando il 4-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita per costo crescente degli archi, e l’albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A (2, 4) appartiene al ciclo hamiltoniano individuato dall’algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4  vero

B Il 4-albero di costo minimo nel sottoproblema in cui  $x_{14} = 0$  è un ciclo hamiltoniano  falso

b) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall’algoritmo al nodo radice?

I  $v_I = 16, v_S = 18$

II  $v_I = 14, v_S = 16$

III  $v_I = 14, v_S = 18$

c) Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

I 1 per ottimalità ( $v_I \geq v_S$ )

II nessuno

III 1 per inammissibilità

d) Su quante e quali variabili l’algoritmo ramifica prima di terminare?

I 2:  $x_{13}, x_{12}$

II 3:  $x_{13}, x_{12}, x_{23}$

III 4:  $x_{13}, x_{12}, x_{23}, x_{24}$

e) Modificare il costo di 1 solo arco in modo tale che l’algoritmo termini alla radice. Giustificare la scelta effettuata.

$c_{24} \leq 2$ : la soluzione ammissibile di partenza coincide con il 4-albero di costo minimo

esistono altre scelte corrette