

## RICERCA OPERATIVA (a.a. 2020/21)

Per ciascun esercizio si individuino tutte le risposte corrette (attenzione: potrebbero essere più di una oppure anche nessuna) e si risponda alle eventuali domande finali.

1) Per arginare la pandemia in corso, la Regione Etruria ha deciso di assegnare il trasporto scolastico della provincia alfa al consorzio di autotrasportatori *TuttiSicuriTuttiSani* che dispone di  $m$  autobus di varie capienze. Più precisamente, l'autobus  $j$  ha una capienza di  $c_j$  posti. Nella provincia sono presenti  $n$  scuole e  $a_i$  è il numero di studenti della scuola  $i$  che necessitano del servizio di trasporto (con  $a_i > c_j$  per ogni coppia "scuola autobus"). Per esigenze sanitarie di contenimento del rischio di contagio, la regione richiede che ciascun autobus utilizzato trasporti studenti di una sola scuola e che la più alta percentuale dei posti occupati sugli autobus sia la più piccola possibile.

Aiuta il coordinatore del consorzio a pianificare il trasporto, formulando in termini di P.L.I. il problema di garantire il trasporto a tutti gli studenti della provincia nel rispetto dei vincoli sanitari e di capienza in modo da minimizzare la massima percentuale dei posti occupati sugli autobus.

Scelte le famiglia di variabili

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se l'autobus } j \text{ trasporta studenti della scuola } i \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} = \text{numero di studenti della scuola } i \text{ trasportati sull'autobus } j$$

e la variabile ausiliaria  $u$  per rappresentare un'approssimazione superiore della massima percentuale di posti occupati, parte della formulazione è data dai vincoli e dalla funzione obiettivo riportati qua sotto:

$$\begin{aligned} \min \quad & u \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n y_{ij} \leq 1 \quad j = 1, \dots, m \\ & x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, y_{ij} \in \{0, 1\}, u \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Selezionare tra i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare **correttamente** la formulazione.

**A**  $\sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, n$  aggiungere

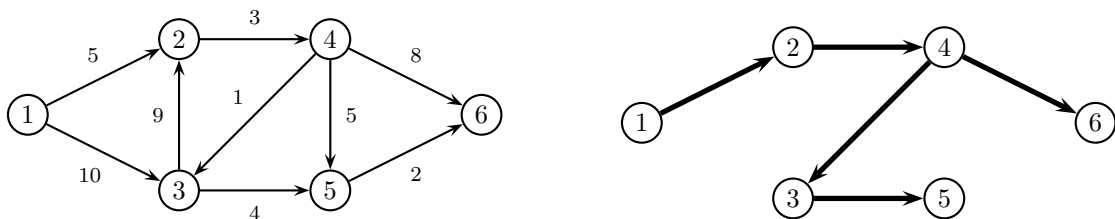
**B**  $x_{ij}y_{ij} \leq c_j \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$  non aggiungere

**C**  $x_{ij} \leq c_j y_{ij} \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$  aggiungere

**D**  $\left( \sum_{i=1}^n x_{ij} \right) / c_j \geq u \quad j = 1, \dots, m$  non aggiungere

**E**  $\left( \sum_{i=1}^n x_{ij} \right) / c_j \leq u \quad j = 1, \dots, m$  aggiungere

2) Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo di sinistra:



a) Quali delle seguenti **affermazioni** sull'albero a destra sono **corrette**?

**A**  $d = (0, 5, 10, 8, 13, 16)$  è il vettore delle etichette relative all'albero falso

**B** Non è un albero dei cammini minimi perché l'arco  $(1, 3)$  non soddisfa la corrispondente condizione di Bellman falso

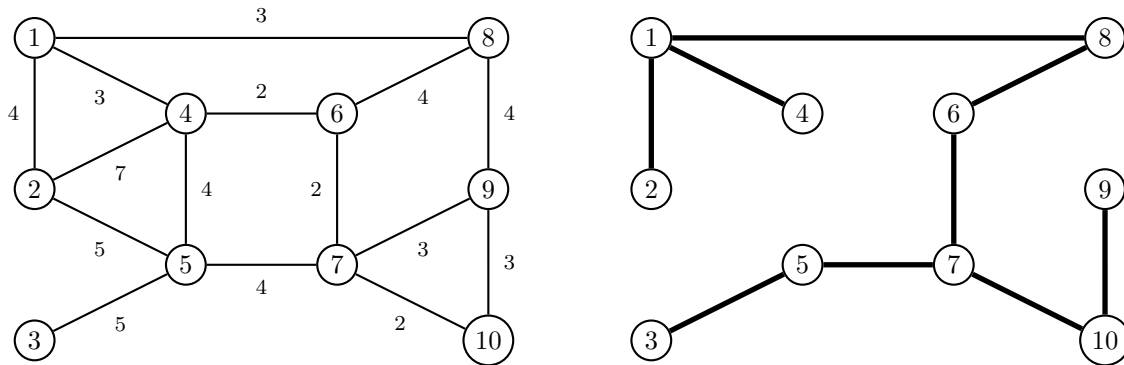
- C Sostituendo l'arco (4, 6) con l'arco (5, 6) si ottiene un albero dei cammini minimi  vero
- D Il cammino dal nodo 1 al nodo 5 sull'albero è di costo minimo  vero

b) Modificare il costo di un arco. Quali arco e costo scegliere affinché l'albero a destra sia un albero dei cammini minimi?

arco (3, 5) con costo  $c_{35} \geq 5$

esistono altre scelte corrette

3) Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul grafo di sinistra:



a) Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

- A Sostituendo l'arco (1, 4) con l'arco (2, 4) si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato  falso
- B Il costo dell'arco (3, 5) non è rilevante per l'eventuale ottimalità dell'albero  vero
- C Non è un albero di costo minimo perché l'arco (7, 9) non soddisfa la condizione di ottimalità per cicli  falso
- D Non è un albero di costo minimo perché l'arco (4, 6) non soddisfa la condizione di ottimalità per cicli  vero

b) Modificare il costo di un arco. Quali arco e costo scegliere affinché l'albero a destra sia un albero di costo minimo? Si mantenga il costo modificato e si aggiunga l'arco (3, 10). Quale costo scegliere per il nuovo arco affinché l'albero a destra rimanga un albero di costo minimo?

arco (4, 6) con costo  $c_{46} \geq 4$

$c_{310} \geq 5$

4) Si consideri la seguente coppia di problemi duali di Programmazione Lineare:

$$\begin{array}{ll}
 \max & x_1 + 2x_2 \\
 (P) & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\
 & x_2 \leq 2 \\
 & -x_1 \leq 0 \\
 & -x_2 \leq 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \min & 6y_1 + 2y_2 \\
 (D) & 2y_1 - y_3 = 1 \\
 & y_1 + y_2 - y_4 = 2 \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0.
 \end{array}$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

- A (0, 2) è una soluzione ottima per (P)  falso
- B (3, 0) è una soluzione primale di base degenera  falso
- C (1, 0, 1, 0) è una soluzione ottima per (D)  falso
- D (2, 2) e (1/2, 3/2, 0, 0) sono soluzioni ottime rispettivamente per (P) e (D)  vero

b) Qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema (D)?

(1/2, 3/2, 0, 0) è l'unica soluzione ottima

5) Si supponga di risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{array}{rcll} \max & 3x_1 & + & x_2 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & & & -x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

tramite l'algoritmo del simplesso primale partendo dalla base  $B = \{3, 4\}$ .

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? (*suggerimento: utilizzare la rappresentazione grafica in  $\mathbb{R}^2$* ).

- A L'indice uscente alla prima iterazione è  $h = 3$   vero
- B La base ottenuta alla seconda iterazione è  $\{2, 3\}$   falso
- C La soluzione di base ottenuta alla seconda iterazione è  $(3, 0)$   vero
- D Il valore ottimo del problema è 8  falso

b) Quanti cambi di base sono necessari per trovare una soluzione ottima? Qual è la soluzione ottima trovata?

1 cambio di base per trovare la soluzione ottima  $(3, 0)$

6) Si consideri il seguente problema dello zaino:

$$\begin{array}{rcll} \max & 10x_1 & + & 11x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 \\ & 5x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & \leq & 10 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

- A Le valutazioni inferiore e superiore del valore ottimo del problema sono:  $v_I(P) = 15$  e  $v_S(P) = 17$   falso
- B Le valutazioni inferiore e superiore del valore ottimo del problema sono:  $v_I(P) = 18$  e  $v_S(P) = 19$   vero
- C Una soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(0, 5/6, 1, 1)$   falso
- D Una soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(1, 5/6, 0, 0)$   vero

b) Qual è la soluzione ottima del problema? Quanti nodi dell'albero di enumerazione bisogna visitare prima di individuare la soluzione ottima?

la soluzione ottima è  $(1, 0, 1, 1)$  individuata dopo la visita di 4 nodi