RICERCA OPERATIVA (a.a. 2022/23)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda *a)* (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande *b), c), d)* e si risponda alla domanda finale *e)*.

1) Per migliorare il servizio, la gestione e la manutenzione nonché per aggiornare lo schema dei prezzi dei biglietti, la direttrice del sistema dei trasporti della *Metropoli Oscillante* ha commissionato al suo capo tecnico *Marc Quantic* uno studio sugli effettivi spostamenti dei passeggeri del vastissimo *tubo sotterraneo*. Grazie al sistema di ricetrasmissione elettronico di pagamenti ed accesso, per ciascun viaggio k effettuato sono registrabili la stazione di origine o_k e la stazione di destinazione d_k nonché il tempo impiegato t_k, ma non l'effettivo tragitto. Questi dati sono disponibili per gli m viaggi compiuti in un giorno di riferimento, e si conosce inoltre la durata canonica c_{ij} dello spostamento tra due stazioni consecutive i e j ed il numero massimo di passeggeri M_{ij} che tale tratta può quotidianamente trasportare.

Aiuta il capo tecnico a ricostruire i percorsi di tutti i viaggi nel modo più accurato possibile: si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere il percorso effettuato da ciascun viaggio con l'obiettivo di minimizzare la media delle discrepanze percentuali tra i tempi stimati di viaggio e quelli effettivi.

Sia (N, A) il grafo orientato i cui nodi rappresentano le stazioni del tubo mentre gli archi individuano le tratte tra coppie di stazioni consecutive. Schematizzate le coppie origini-destinazioni dei viaggi attraverso la matrice di dati di coefficienti

$$b_i^k = \begin{cases} -1 & \text{if } i = o_k \\ 0 & \text{if } i \neq o_k, d_k \\ 1 & \text{if } i = d_k \end{cases} \qquad i \in N,\ k = 1, \dots, m$$

e scelte le famiglie di variabili

$$x_{ij}^k = \text{numero di volte che la tratta } (i,j) \text{ viene percorsa durante il viaggio } k \qquad (i,j) \in A,\ k = 1, \dots, m$$

$$s_k = \text{approssimazione superiore della discrepanza \% tra tempo stimato ed effettivo del viaggio } k \qquad k = 1, \dots, m$$

parte della formulazione è data dai vincoli riportati qua sotto:

$$\min$$

$$\sum_{k=1}^{m} x_{ij}^k \leq M_{ij} \qquad (i,j) \in A$$

$$x_{ij}^k \in \mathbb{Z}_+ \qquad (i,j) \in A,\ k = 1, \dots, m.$$

a) Selezionare tra le funzioni obiettivo ed i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

A $\sum_{k=1}^{m} s_k$ (funzione obiettivo) — aggiungere

B $\left(\sum_{k=1}^{m} t_k\right)/m$ (funzione obiettivo) — non aggiungere

C $\sum_{j \in FN(i)} x_{ij}^k - \sum_{j \in BN(i)} x_{ji}^k = b_i^k \quad i \in N,\ k = 1, \dots, m$ — non aggiungere

D $\sum_{j \in BN(i)} x_{ji}^k - \sum_{j \in FN(i)} x_{ij}^k = b_i^k \quad i \in N,\ k = 1, \dots, m$ — aggiungere

E $\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}^k - t_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, m$ — non aggiungere

F $\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}^k - t_k \leq s_k \quad k = 1, \dots, m$ — non aggiungere

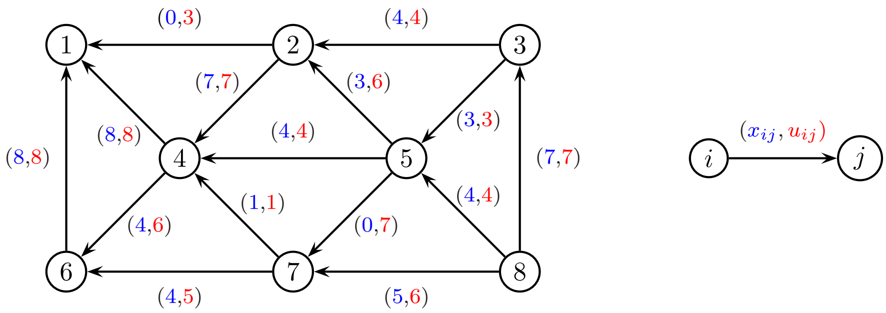
G $\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}^k \leq t_k s_k \quad k = 1, \dots, m$ — non aggiungere

H $\sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}^k - t_k \le t_k s_k \quad k = 1,\dots,m$ — aggiungere

I $|\sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}^k - t_k\,| \le t_k s_k \quad k = 1,\dots,m$ — non aggiungere

J $t_k - \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}^k \le t_k s_k \quad k = 1,\dots,m$ — aggiungere

2) Si consideri il problema del flusso massimo dal nodo 8 al nodo 1 sul grafo seguente:



a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Il valore del flusso nel taglio $(\{1,2,3\},\{4,5,6,7,8\})$ è 16 — vero

B La capacità del taglio $(\{1,2,3,4,5,6\},\{7,8\})$ è 24 — falso

b) Qual è un cammino aumentante?

I $\{8,7,6,1\}$ II $\{8,7,6,4,2,1\}$ III non ne esistono

c) Quale dei seguenti è un taglio di capacità minima?

I $(\{1\},\{2,3,4,5,6,7,8\})$ II $(\{1,2,4,5,6\},\{3,7,8\})$ III $(\{1,2,3,4,5\},\{6,7,8\})$

d) Diminuendo la capacità dell'arco $(4,5)$ a $u_{45} = 3$, di quanto diminuisce il valore del flusso massimo?

I 3 II 1 III 0

e) Modificare la capacità di 1 solo arco in modo che la capacità minima dei tagli sia 19. Giustificare la risposta.

$u_{8,5} = 6$: $(8,5)$ è l'unico arco comune a tutti i tagli di capacità minima, questo aumento di capacità consente di inviare altre 2 unità di flusso sul cammino $\{8,5,2,1\}$ certificando così la minimalità dei tagli al valore richiesto

3) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare ed il suo problema duale (D):

$$
(P)\quad
\begin{array}{rrcrcl}
\max & 2\alpha\, x_1 & + & x_2 & & \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \le & 3 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & \le & 1 \\
 & \beta x_1 & + & x_2 & \le & 1 \\
 & x_1 & & & \le & 2 \\
 & & & x_2 & \le & 1
\end{array}
$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $\xi = (0,-1)$ è una direzione ammissibile per $\bar{x} = (0,1)$ — vero

B $\bar{x} = (0,1)$ e $\bar{y} = (0,-\alpha,0,0,1+\alpha)$ soddisfano gli scarti complementari se e solo se $-1 \le \alpha \le 0$ — falso

b) Quali sono tutti i valori di α per cui $\bar{y} = (0, -\alpha, 0, 0, 1 + \alpha)$ è soluzione ottima di (D)?

I $|\alpha| \leq 1$ II $-1 \leq \alpha \leq 0$ III dipendono da β

c) Se $\beta < 1$, quali sono tutti i valori di α per cui $\hat{x} = (2, -1)$ è soluzione ottima di (P)?

I $|\alpha| \leq 1$ II $\alpha \geq 1$ III dipendono da β

d) Se $\alpha = -1$ e $\beta \geq 0$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (P)?

I (P) è sup. illimitato II $\{(0, 1)\}$ III $\{(t, 1 + 2t) : t \leq 0\}$

e) Scegliere valori per α e β in modo tale che (D) sia inferiormente illimitato. Giustificare la risposta.

$\bar{x} = (0, 1)$ appartiene alla regione ammissibile di (P) per qualsiasi coppia di valori per α e β, pertanto (D) non può mai risultare inferiormente illimitato

4) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$(P)\quad \begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & - & 4x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{rrcrcrcrcl} \min & 4y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & + & 2y_4 & & \\ & y_1 & - & y_2 & & & + & 2y_4 & = & 1 \\ & -4y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = & 1 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{1, 2\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $\xi = (-1, -1)$ è una direzione di recessione della regione ammissibile di (P) — falso

B $h = 2$ e $k = 3$ sono l'indice uscente ed entrante individuati alla prima iterazione dell'algoritmo — falso

b) Quali sono la direzione di crescita ξ e il passo di spostamento $\bar{\lambda}$ individuati alla seconda iterazione dell'algoritmo?

I $\xi = (1, 1)$, $\bar{\lambda} = 0$ II $\xi = (1, 0)$, $\bar{\lambda} = 1$ III $\xi = (1, 0)$, $\bar{\lambda} = 0$

c) Quali sono le soluzioni ottime individuate dall'algoritmo?

I $\bar{x} = (1, 2)$, $\bar{y} = (0, -1, 2, 0)$ II $\bar{x} = (-2, -1)$, $\bar{y} = (0, 2/3, 5/3, 0)$ III $\bar{x} = (1, 2)$, $\bar{y} = (0, 0, 1/2, 1/2)$

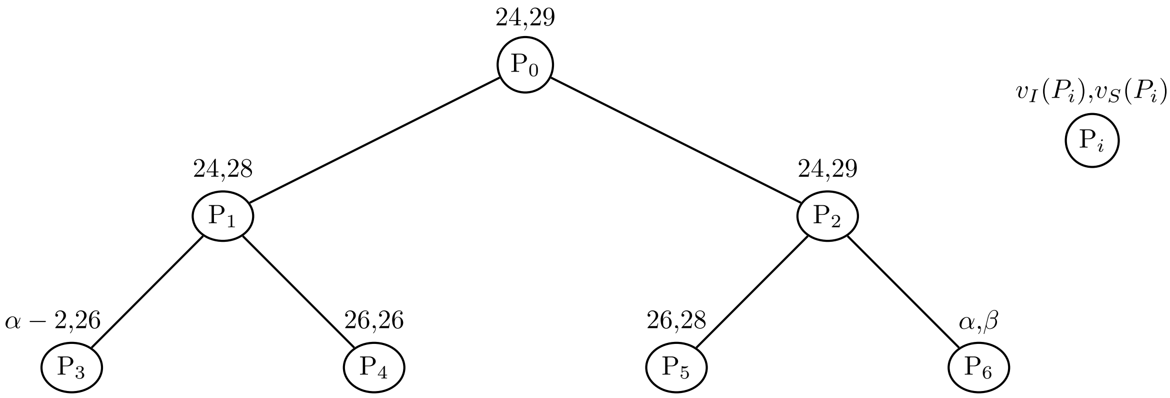
d) Qual è un piano di taglio (di Gomory) che esclude la soluzione ottima $\bar{y}$ trovata alla domanda precedente?

I $y_1 + y_2 \geq 1$ II $y_1 + y_2 \leq 1$ III $y_3 + y_4 \geq 1$

e) Scegliere una diversa funzione obiettivo per (D) in modo tale che il problema (P) sia superiormente illimitato. Giustificare la scelta effettuata.

non è possibile: sebbene una modifica dei coefficienti della funzione obiettivo di (D) trasli i bordi della regione ammissibile di (P), non ne altera la forma poliedrale e l'insieme delle sue direzioni di recessione rimane costitutito dalla sola direzione nulla

5) Si consideri un problema di Programmazione Lineare Intera con variabili binarie $x_j \in \{0,1\}$. In figura è riportata la porzione dell'albero di enumerazione totale ottenuta tramite l'esecuzione di alcune iterazioni di un metodo "Branch and Bound" opportuno: i nodi sono stati visitati in ordine crescente dell'indice del sottoproblema P_i e sul nodo sono riportate le corrispondenti valutazioni inferiore $v_I(P_i)$ e superiore $v_S(P_i)$.



a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Si tratta di un problema di minimizzazione — falso

B β deve necessariamente soddisfare la disuguaglianza $\beta \leq 29$ — vero

b) Quale valore α non può assumere?

I $\alpha = \beta$ II $\alpha = 25$ III $\alpha = 28$

c) Quale relazione è sempre verificata?

I $\alpha \leq \beta$ II $\alpha \geq 26$ III $\alpha = \beta$

d) Se $\alpha = \beta = 26$, qual è l'insieme di tutti i nodi che possono venir chiusi?

I $\{P_4, P_6\}$ II $\{P_3, P_5\}$ III $\{P_3, P_4, P_6\}$

e) Si scelgano valori per α e β che garantiscano la chiusura di tutti i nodi ancora aperti. Giustificare la scelta effettuata.

$\alpha = \beta = 28$: la soluzione ottima del rilassamento di P_6 risulta ammissibile e ha valore maggiore od uguale a $v_S(P_3), v_S(P_4)$ e $v_S(P_5)$