RICERCA OPERATIVA (a.a. 2022/23)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda *a*) (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande *b*), *c*), *d*) e si risponda alla domanda finale *e*).

1) Le astronavi *Arcardiae* della flotta del pirata spaziale *Capitan Albator* hanno saccheggiato i ricchissimi pianeti del sistema solare *Tau Ceti* e sono in attesa di istruzioni per coordinare la fuga fuori del sistema solare stesso. Infatti i pianeti sono collegati tra loro e con l'unico portale di accesso al sistema solare da una capillare rete di buchi arancioni: queste connessioni spazio-temporali, progettate dal *professor Vorelli*, possono venir percorse in tempo unitario (indipendentemente dalla distanza) ma ciascuna da una sola astronave alla volta. Inoltre, la rete può sopportare al più lo spostamento di M astronavi per unità di tempo, pena il suo collasso.

Sapendo che su ciascun pianeta i sono presenti b_i astronavi, aiuta Capitan Albator a pianificare il piano di fuga da Tau Ceti: si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere come e quando le astronavi si dovranno spostare attraverso i punti della rete fino a raggiungere tutte il portale di accesso, nel rispetto delle capacità di trasporto individuali e collettiva dei buchi arancioni, con l'obiettivo di minimizzare il tempo di completamento della fuga.

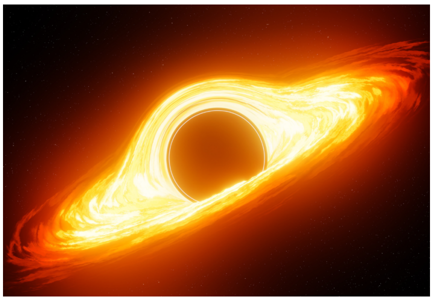
Sia (N, A) il grafo orientato i cui nodi rappresentano i pianeti e il portale di accesso mentre gli archi individuano i buchi arancioni tra coppie di pianeti oppure tra un pianeta e il portale di accesso p. Sia inoltre T il prodotto tra il numero complessivo di astronavi e la massima distanza (espressa in numero di buchi arancioni) tra i pianeti e il portale di accesso. Scelte le famiglie di variabili

$$y_t = \begin{cases} 1, & \text{se la } t\text{-esima unità di tempo viene utilizzata,} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad t = 1, \ldots, T$$

$$x_{ij}^t = \begin{cases} 1, & \text{se il buco arancione } (i,j) \in A \text{ viene percorso da 1 astronave al tempo } t, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad (i,j) \in A,\ t = 1, \ldots, T$$

parte della formulazione è data dai vincoli riportati qua sotto:

$$\begin{array}{lll} \min & & \\ & x_{ij}^t \le y_t & (i,j) \in A,\ t = 1, \ldots, T \\ & \sum_{j \in FN(i)} x_{ij}^1 \le b_i, & i \in N,\ i \ne p \\ & \sum_{j \in FN(i)} x_{ij}^t \le b_i + \sum_{s=1}^{t-1} \Big(\sum_{j \in BN(i)} x_{ji}^s - \sum_{j \in FN(i)} x_{ij}^s \Big), & i \in N,\ i \ne p,\ t = 2, \ldots, T \\ & y_t, x_{ij}^t \in \{0,1\} & (i,j) \in A,\ t = 1, \ldots, T. \end{array}$$



a) Selezionare tra le funzioni obiettivo ed i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

A $\sum_{t=1}^{T} y_t$ (funzione obiettivo) — aggiungere

B $\max\{ y_t \ :\ t = 1, ..., T \}$ (funzione obiettivo) — non aggiungere

C $\sum_{t=2}^{T} (y_t - y_{t-1})$ (funzione obiettivo) — non aggiungere

D $\sum_{t=1}^{T} x_{ij}^t \le M \quad (i,j) \in A$ — non aggiungere

E $\sum_{(i,j) \in A} x_{ij}^t \le M \quad t = 1, \ldots, T$ — aggiungere

F $y_t \le y_{t-1} \quad t = 2, \ldots, T$ — aggiungere

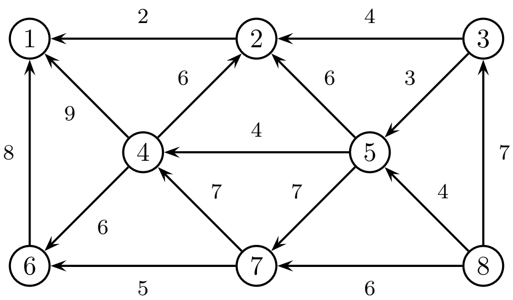
G $y_t \ge y_{t-1} \quad t = 2, \ldots, T$ — non aggiungere

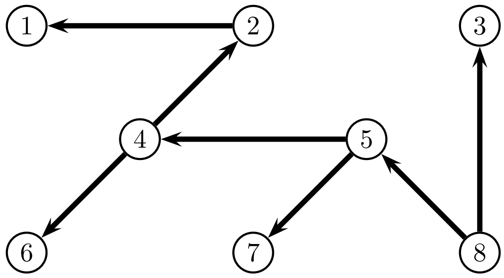
H $\sum_{j \in BN(i)} x^t_{ji} + b_i = \sum_{j \in FN(i)} x^t_{ij} \quad i \in N,\ i \neq p,\ t = 1, \ldots, T$ non aggiungere

I $\sum_{j \in BN(i)} \left(\sum_{t=1}^{T} x^t_{ji} \right) + b_i = \sum_{j \in FN(i)} \left(\sum_{t=1}^{T} x^t_{ij} \right) \quad i \in N,\ i \neq p$ aggiungere

J $\sum_{j \in BN(i)} b_i x^t_{ji} = \sum_{j \in FN(i)} b_j x^t_{ij} \quad i \in N,\ i \neq p,\ t = 1, \ldots, T$ non aggiungere

2) Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 8 sul grafo di sinistra:





a) Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

A Sostituendo l'arco $(4, 2)$ con l'arco $(5, 2)$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato falso

B $d = (16, 14, 7, 8, 4, 14, 11, 0)$ è il vettore delle etichette relative all'albero vero

b) Qual è l'insieme di tutti gli archi che non soddisfano le corrispondenti condizioni di Bellman?

I $\{(5, 2), (8, 7)\}$ II $\{(3, 2), (8, 7)\}$ III $\{(3, 2), (5, 2), (8, 7)\}$

c) Quali sostituzioni di archi bisogna fare con alcuni scelti al punto b) per minimizzare il costo dell'albero risultante?

I $(5, 7)$ con $(8, 7)$ II $(4, 2), (5, 7)$ con $(5, 2), (8, 7)$ III $(4, 2), (5, 7)$ con $(3, 2), (8, 7)$

d) Qual è il costo di un albero dei cammini minimi?

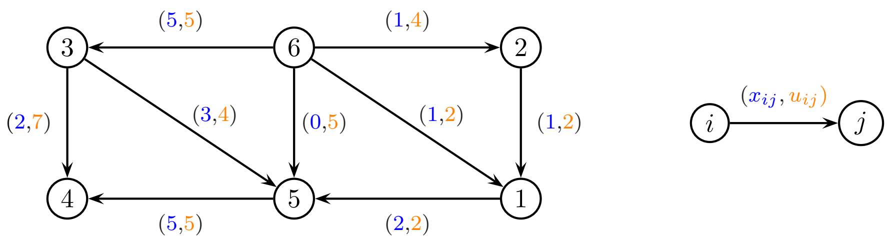
I 34 II 58 III 35

e) Modificare il costo del minor numero possibile di archi affinché l'albero a destra sia l'unico albero dei cammini minimi. Giustificare la risposta.

$c_{87} > 11$ e $c_{42} < 2$ garantiscono che tutte le condizioni di Bellman sono soddisfatte come disuguaglianze

esistono altre scelte corrette

3) Si consideri il problema del flusso massimo dal nodo 6 al nodo 4 sul grafo seguente:



a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Il valore del flusso nel taglio $(\{1,2,5,6\},\{3,4\})$ è 13 falso

B La capacità del taglio $(\{1,3,6\},\{2,4,5\})$ è 22 vero

b) Qual è un cammino aumentante?

I $\{6,5,3,4\}$ II $\{6,5,4\}$ III non ne esistono

c) Quale dei seguenti è un taglio di capacità minima?

I $(\{1,2\},\{3,4,5,6\})$ II $(\{1,2,5,6\},\{3,4\})$ III $(\{5,6\},\{1,2,3,4\})$

d) Diminuendo la capacità dell'arco $(3,4)$ a $u_{34}=4$, di quanto diminuisce il valore del flusso massimo?

I 3 II 1 III 0

e) Modificare la capacità di 1 solo arco in modo che la capacità minima dei tagli sia 13. Giustificare la risposta.

non è possibile: i tagli $(\{1,2,6\},\{3,4,5\})$ e $(\{1,2,3,5,6\},\{4\})$ di capacità 12 non hanno archi in comune

4) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$(P)\quad \begin{array}{rrcrcr} \max & 2x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & & & -x_2 & \leq & 0 \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{rrcrcrcrcrcr} \min & 4y_1 & + & 4y_2 & + & 6y_3 & + & 2y_4 & & & & \\ & y_1 & & & + & y_3 & + & y_4 & & & = & 2 \\ & & & y_2 & + & y_3 & - & y_4 & - & y_5 & = & 1 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \geq & 0 \end{array}$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B=\{1,4\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $\xi=(-1,0)$ è una direzione di recessione della regione ammissibile di (P) vero

B $x=(2,4)$ e $y=(0,-1,2,0,0)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari vero

b) Quali sono la direzione di crescita ξ e il passo di spostamento $\bar\lambda$ individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $\xi=(1,1)$, $\bar\lambda=0$ II $\xi=(0,1)$, $\bar\lambda=2$ III $\xi=(0,1)$, $\bar\lambda=0$

c) Quali sono le soluzioni ottime individuate dall'algoritmo?

I $\bar x=(4,2)$, $\bar y=(3,0,0,-1,0)$ II $\bar x=(4,2)$, $\bar y=(1,0,1,0,0)$ III $\bar x=(2,4)$, $\bar y=(0,0,2,0,0)$

d) Qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (D)?

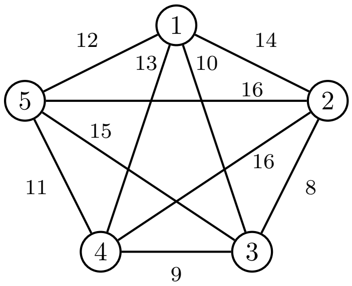
I $\{(0,0,2,0,0)\}$ II $\{(3-2t,0,t,t-1,0)\,:\,1\leq t\leq 3/2\}$ III $\{(1-2t,0,t+1,t,0)\,:\,0\leq t\leq 1\}$

e) Modificare il termine noto di uno dei vincoli di (P) in modo tale che il problema duale (D) risulti inferiormente illimitato. Giustificare la scelta effettuata.

$b_5=-5$: la regione ammissibile di (D) non cambia, mentre la regione ammissibile di (P) risulta vuota e quindi (D) inferiormente illimitato

esistono altre scelte corrette

5) Si considerino il problema del ciclo hamiltoniano di costo minimo sul seguente grafo



ed il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 5, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando il 5-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita per costo crescente degli archi, e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A L'arco $(1, 5)$ appartiene alla soluzione ammissibile di partenza — vero

B L'arco $(1, 4)$ appartiene al 5-albero di costo minimo nel sottoproblema in cui $x_{13} = 0$ — vero

b) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $v_I = 52, v_S = 54$ | II $v_I = 50, v_S = 54$ | III $v_I = 52, v_S = 52$

c) Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

I 1 per $v_I(P_i) \geq v_S(P_i)$ | II 2 per ammissibilità | III 1 per inammissibilità

d) Su quante variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I 2 | II 3 | III 6

e) Modificare il costo di 1 solo arco appartenente alla soluzione iniziale in modo tale che nessun nodo venga chiuso alla prima ramificazione. Giustificare la scelta effettuata.

$c_{23} = 11$: la soluzione ammissibile di partenza cambia e fornisce valore $v_S = 60$, mentre i due 5-alberi di costo minimo ottenuti ramificando sull'arco di costo minimo x_{34} non sono ammissibili e forniscono valori $v_I = 53$ e $v_I = 58$ che non permettono di chiudere i nodi