RICERCA OPERATIVA (a.a. 2022/23)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda *a)* (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande *b), c), d)* e si risponda alla domanda finale *e)*.

1) Flagellata da anni di tempeste astrali e termiche, l'agricoltura del pianeta *DOP-11* è completamente devastata e la produzione largamente insufficiente per i bisogni della popolazione ormai stremata. Per predisporre un piano di aiuti l'*Organizzazione Alimentare Interplanetaria* può contare sul supporto degli altri 198 pianeti consociati. Gli esperti hanno stimato la durata della fase acuta della crisi in 25 anni siderali nonché la necessità di D_h tonnellate di derrate alimentari di deperibilità triennale da inviare su *DOP-11* per ciascun anno h della crisi. L'industria alimentare di ciascun pianeta i può incrementare la propria produzione fino a d_{ih} tonnellate per ciascun anno h e destinare questo incremento alla popolazione colpita. Parimenti tale incremento non può essere inferiore a ℓ_{ih} tonnellate per questioni puramente tecnologiche. Inoltre, per avviare questa intensificazione della produzione è necessario un investimento iniziale di f_i spighe di titano, mentre il costo della produzione e del trasporto di ogni tonnellata è valutato c_{ih} spighe nell'anno h. Da parte sua, negli stessi anni, l'organizzazione è in grado di fornire autonomamente m_h tonnellate al costo di c_h spighe ciascuna e stima di ricevere donazioni per un ammontare complessivo annuale di R_h spighe.

Aiuta l'Organizzazione Alimentare Interplanetaria a predisporre un piano di aiuti articolato in 25 anni, formulando in termini di P.L.I. il problema di stabilire quante tonnellate produrre, quali pianeti coinvolgere e quante tonnellate aggiuntive richiedere a ciascuno in ogni anno del piano nel rispetto delle capacità produttive in modo da minimizzare il costo complessivo al netto delle donazioni ricevute.

Scelte le famiglie di variabili

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se il pianeta } i \text{ viene coinvolto,} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad x_{ih} = \begin{cases} 1, & \text{se il pianeta } i \text{ incrementa la produzione nell'anno } h, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$y_{ih} = \text{ tonnellate richieste al pianeta } i \text{ nell'anno } h, \qquad i = 1, \ldots, 198, \; h = 1, \ldots, 25$$

$$y_h = \text{ tonnellate fornite autonomamente dall'organizzazione nell'anno } h,$$

parte della formulazione è data dai vincoli riportati qua sotto:

$$\min$$

$$y_h \le m_h \qquad h = 1, \ldots, 27$$

$$y_{ih}, y_h \ge 0, \; x_{ih}, x_i \in \{0,1\} \qquad i = 1, \ldots, 198, \; h = 1, \ldots, 25.$$

a) Selezionare tra le funzioni obiettivo ed i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

A $\sum_{h=1}^{25} \left(c_h y_h + \sum_{i=1}^{198} (c_{ih} y_{ih} + f_i x_i) - R_h \right)$ (funzione obiettivo) — non aggiungere

B $\sum_{h=1}^{25} \left(c_h y_h + \sum_{i=1}^{198} c_{ih} y_{ih} \right) + \sum_{i=1}^{198} f_i x_i$ (funzione obiettivo) — aggiungere

C $\sum_{h=1}^{25} \left((c_h - R_h) y_h + \sum_{i=1}^{198} (c_{ih} y_{ih} + f_i x_i) \right)$ (funzione obiettivo) — non aggiungere

D $\ell_{ih} x_{ih} \le y_{ih} \le d_{ih} x_{ih} \quad i = 1, \ldots, 198, \; h = 1, \ldots, 25$ — aggiungere

E $\ell_{ih} \le y_h + x_{ih} \le m_h + d_{ih} \quad i = 1, \ldots, 198, \; h = 1, \ldots, 25$ — non aggiungere

F $\sum_{k=a_h}^{h} \left(y_k + \sum_{i=1}^{198} y_{ik} \right) \ge \sum_{k=a_h}^{h} D_k \quad a_h = \max\{1, h-2\}, \; h = 1, \ldots, 25$ — aggiungere

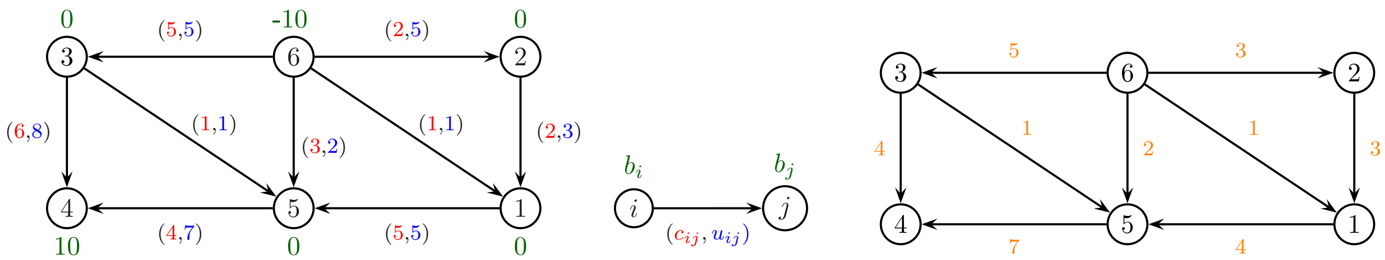
G $y_h + y_{ih} \ge D_h x_{ih} \quad i = 1, \ldots, 198, \; h = 1, \ldots, 25$ — non aggiungere

H $y_h + \sum_{i=1}^{198} y_{ih} x_i \geq D_h \quad h = 1, \ldots, 25$ non aggiungere

I $\sum_{h=1}^{25} x_{ih} \leq 25\, x_i \quad i = 1, \ldots, 198$ aggiungere

J $\ell_{ih} x_{ih} x_i \leq y_{ih} \leq d_{ih} x_{ih} x_i \quad i = 1, \ldots, 198, \; h = 1, \ldots, 25$ non aggiungere

2) Si considerino il problema di flusso di costo minimo sul grafo di sinistra e lo pseudoflusso x riportato a destra:



a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Il vettore degli sbilanciamenti è $e_x = (0, 0, 0, 1, 0, -1)$ e lo sbilanciamento complessivo è $g(x) = 1$ vero

B $\{6, 3, 4\}$ è un cammino aumentante falso

b) Quale quantità di flusso può passare attraverso il cammino aumentante $\{4, 5, 6\}$ diminuendo $g(x)$?

I 1 II 2 III 7

c) Quale dei seguenti è un cammino aumentante di costo minimo?

I $\{4, 3, 6\}$ II $\{4, 5, 6\}$ III $\{4, 5, 1, 2, 6\}$

d) Per quali valori del costo dell'arco $(3, 5)$ lo pseudoflusso risulta minimale?

I $c_{35} \leq 0$ II $c_{35} \geq 2$ III $c_{35} \leq 2$

e) Modificare la capacità di un solo arco in modo tale che lo pseudoflusso non sia minimale. Giustificare la risposta.

basta aumentare la capacità dell'arco $(1, 6)$: nel grafo residuo si crea il ciclo $(6, 1, 2)$ di costo negativo

3) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare ed il suo problema duale (D):

$$
(P) \quad
\begin{array}{lrcrcl}
\max & & & 2\alpha x_2 & & \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 2
\end{array}
$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Se $\alpha < 0$, allora (P) è superiormente illimitato vero

B $\bar{x} = (1, 2)$ e $\bar{y} = (0, \alpha, \alpha, 0, 0)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari vero

b) Se $\alpha = 1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (P)?

$\boxed{\text{I}}$ $\{(2,2)\}$ $\boxed{\text{II}}$ $\{(2,t) : -2 \le t \le 1\}$ $\boxed{\text{III}}$ $\{(1,2)\}$

c) Se $\alpha = 2$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (D)?

$\boxed{\text{I}}$ $\{(0,t,t,0,2(2-t)) : 0 \le t \le 2\}$ $\boxed{\text{II}}$ (D) è inferiormente illimitato $\boxed{\text{III}}$ $\{(0,0,0,0,2)\}$

d) Qual è l'insieme delle direzioni di recessione del poliedro?

$\boxed{\text{I}}$ $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 = \xi_2 \le 0\}$ $\boxed{\text{II}}$ $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : 2\xi_1 \le \xi_2 \le \xi_1\}$ $\boxed{\text{III}}$ $\{(-1,-1)\}$

e) Scegliere una funzione obiettivo per (P) in modo tale che le soluzioni $\bar{x} = (1,2)$ e $\hat{x} = (2,1)$ siano entrambe ottime. Giustificare la risposta.

> $c = (1,1)$: la soluzione duale $y = (0,1,0,0,0)$ soddisfa la condizione degli scarti complementari con entrambe ed è ammissibile per (D)

4) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$
(P) \quad \begin{array}{rrcrcr}
\max & 2x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_1 & & & \le & 5 \\
 & & & x_2 & \le & 6 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & \le & 15 \\
 & x_1 & + & x_2 & \le & 9
\end{array}
\qquad\qquad
(D) \quad \begin{array}{rrcrcrcrcr}
\min & 5y_1 & + & 6y_2 & + & 15y_3 & + & 9y_4 & & \\
 & y_1 & & & + & 3y_3 & + & y_4 & = & 2 \\
 & & & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = & 1 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \ge & 0.
\end{array}
$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{1,2\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

$\boxed{\text{A}}$ $d = (-1,0,1,0)$ è una direzione di decrescita per il problema (D) $\boxed{\text{falso}}$

$\boxed{\text{B}}$ $x = (5,6)$ e $y = (2,1,0,0)$ sono le soluzioni di base individuate alla prima iterazione dell'algoritmo $\boxed{\text{vero}}$

b) Quali sono gli indici entrante k ed uscente h nonché il passo di spostamento $\bar{\theta}$ individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

$\boxed{\text{I}}$ $k = 3,\ h = 2,\ \bar{\theta} = 1/2$ $\boxed{\text{II}}$ $k = 4,\ h = 1,\ \bar{\theta} = 1$ $\boxed{\text{III}}$ $k = 3,\ h = 1,\ \bar{\theta} = 2/3$

c) Qual è la soluzione ottima di (D) individuata dall'algoritmo?

$\boxed{\text{I}}$ $\bar{y} = (0, 1/3, 2/3, 0)$ $\boxed{\text{II}}$ $\bar{y} = (0,0,1,0)$ $\boxed{\text{III}}$ $\bar{y} = (0,0,1/2,1/2)$

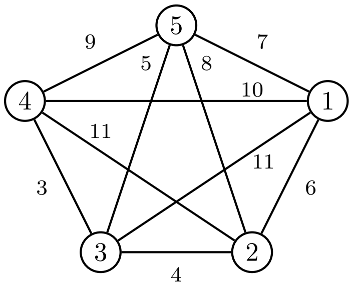
d) Qual è un piano di taglio (di Gomory) che esclude la soluzione ottima $\bar{y}$ trovata alla domanda precedente?

$\boxed{\text{I}}$ $2y_1 + 2y_4 \le 1$ $\boxed{\text{II}}$ $y_1 + y_4 \ge 2$ $\boxed{\text{III}}$ $y_2 + y_3 \ge 2$

e) Scegliere una funzione obiettivo per (P) in modo tale che la soluzione ottima di (P) individuata dall'algoritmo resti ottima mentre la soluzione di (D) individuata al punto c) non risulti più ottima. Giustificare la scelta effettuata.

> $\bar{x} = (3,6)$ è la soluzione primale di base relativa a $B = \{2,3\}$ e $\bar{y}$ del punto c) la corrispondente soluzione duale. Scegliendo $c = (1,1)$ la soluzione duale cambia in $y = (0,0,0,1)$ che risulta ancora ammissibile, quindi $\bar{x}$ rimane ottima mentre $\bar{y}$ non è più neanche ammissibile.

5) Si considerino il problema del ciclo hamiltoniano di costo minimo sul seguente grafo



ed il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando il 4-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita per costo crescente degli archi, e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A L'arco $(1, 5)$ appartiene al 4-albero di costo minimo — falso

B Il 4-albero di costo minimo nel sottoproblema in cui $x_{34} = 0$ è un ciclo hamiltoniano — vero

b) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $v_I = 27, v_S = 29$ II $v_I = 27, v_S = 27$ III $v_I = 26, v_S = 30$

c) Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

I 1 per $v_I(P_i) \geq v_S(P_i)$ II 2 per ammissibilità III 1 per inammissibilità

d) Su quante e quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I 3: x_{34}, x_{35}, x_{23} II 3: x_{34}, x_{23}, x_{35} III 2: x_{34}, x_{23}

e) Modificare il costo di 1 solo arco in modo tale che nessun nodo venga chiuso alla prima ramificazione. Giustificare la scelta effettuata.

$c_{45} = 12$: la soluzione ammissibile di partenza rimane la stessa ma con valore $v_S = 32$, il 4-albero di costo minimo ha valore $v_I = 28$ (con l'arco (1,4) al posto di (3,5)); alla prima ramificazione l'utilizzo dell'arco $(3, 4)$ non modifica v_I (lasciando così il nodo aperto) mentre, nell'altro ramo, vietandone l'utilizzo, si deve inserire $(2, 4)$ costruendo un 4-albero, che non risulta essere un ciclo hamiltoniano, con $v_I = 29$ e che pertanto non consente la chiusura del nodo.