RICERCA OPERATIVA (a.a. 2022/23)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda *a*) (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande *b*), *c*), *d*) e si risponda alla domanda finale *e*).

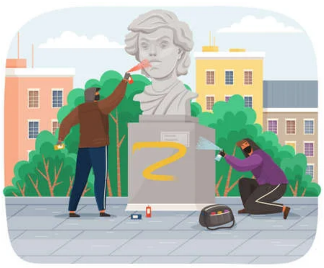
1) Gli informatores pretoriani della *Polis dell'Eterna Beltà* hanno scoperto piani segreti dei *Comati Nordici* per arruolare bande di barbari allo scopo di imbrattare con vernice indelebile alcuni degli n monumenti della polis, e hanno avvisato il Primo Console *Gattabella*. Il proconsole alla tecnologia ha tempestivamente messo a disposizione m androidi di ultimissima generazione per proteggere i monumenti: i tecnici del proconsole hanno stimato che a_i androidi siano sufficienti a fornire la massima protezione possibile al monumento i e che il livello di protezione aumenti proporzionalmente al numero di androidi impiegati, mentre il costo di installazione del sistema di protezione ammonta a f_i aurei più un costo di gestione c_i per ciascun androide impiegato. A questo scopo il proconsole alle finanze ha messo a disposizione uno stanziamento complessivo di A aurei.

Aiuta il Primo Console a predisporre un piano di protezione che tuteli almeno due terzi dei monumenti, formulando il termini di P.L.I. il problema di decidere quali monumenti proteggere e con quanti androidi ciascuno nel rispetto dello stanziamento assegnato in modo da massimizzare il minimo livello di protezione garantito ai monumenti protetti.

Scelte le famiglie di variabili

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{se il monumento } i \text{ viene protetto,} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n,$$
$$x_i = \text{numero di androidi dislocati a protezione del monumento } i,$$

parte della formulazione è data dalla funzione obiettivo e dai vincoli riportati qua sotto:



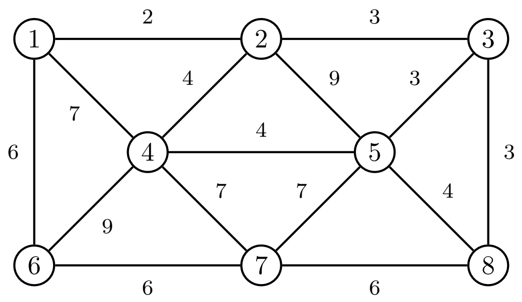
$$\begin{aligned} \max \quad & \ell \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i \le m \qquad && i = 1, \dots, n, \\ & y_i \in \{0,1\}, \; x_i \in \mathbb{Z}_+ \qquad && i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

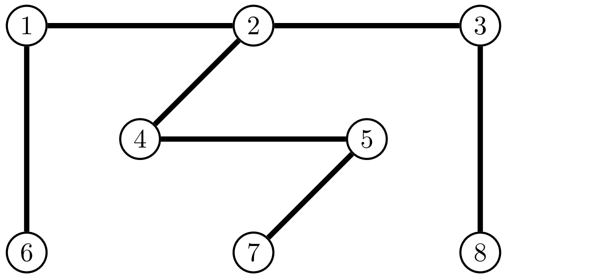
dove la variabile ausiliaria ℓ fornisce un'approssimazione inferiore del minimo livello di protezione dei monumenti protetti.

a) Selezionare tra i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

- A $\sum_{i=1}^{n} (f_i + c_i x_i) \le A \sum_{i=1}^{n} y_i$ — non aggiungere
- B $\sum_{i=1}^{n} (f_i y_i + c_i x_i) \le A$ — aggiungere
- C $x_i \le a_i y_i \qquad i = 1, \dots, n$ — aggiungere
- D $x_i \ge y_i \qquad i = 1, \dots, n$ — aggiungere
- E $x_i \ge a_i y_i \qquad i = 1, \dots, n$ — non aggiungere
- F $a_i \ell \le x_i + a_i(1 - y_i) \qquad i = 1, \dots, n$ — aggiungere
- G $a_i \ell \le x_i \qquad i = 1, \dots, n$ — non aggiungere
- H $a_i \ell \ge x_i + a_i(1 - y_i) \qquad i = 1, \dots, n$ — non aggiungere
- I $3 \sum_{i=1}^{n} y_i \ge 2n$ — aggiungere
- J $2 \sum_{i=1}^{n} y_i \ge 3n$ — non aggiungere

2) Si considerino il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul grafo di sinistra e l'albero riportato a destra:





a) Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

A Sostituendo l'arco $(3, 8)$ con l'arco $(3, 5)$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato — falso

B Nel grafo esistono altri 5 alberi di copertura che hanno lo stesso costo di quello a destra — vero

b) Quale arco non soddisfa la condizione di ottimalità per tagli?

I nessuno — II $(1, 6)$ — III $(2, 4)$

c) Quali archi non soddisfano la condizione di ottimalità per cicli?

I $(5, 8), (6, 7), (7, 8)$ — II $(3, 5), (6, 7), (7, 8)$ — III $(4, 6), (4, 7)$

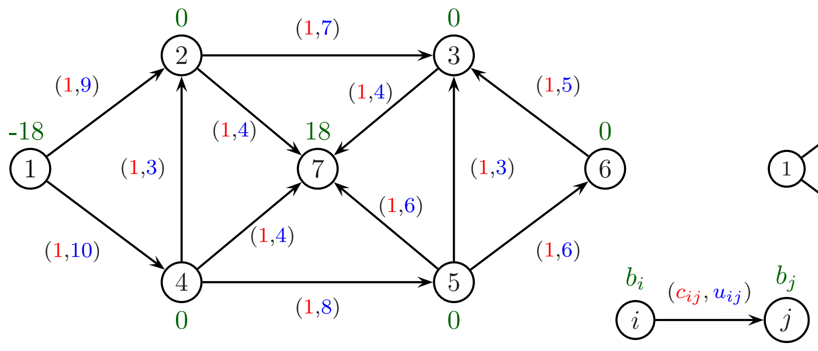
d) Quali sostituzioni di archi bisogna fare per ottenere un albero di copertura di costo minimo?

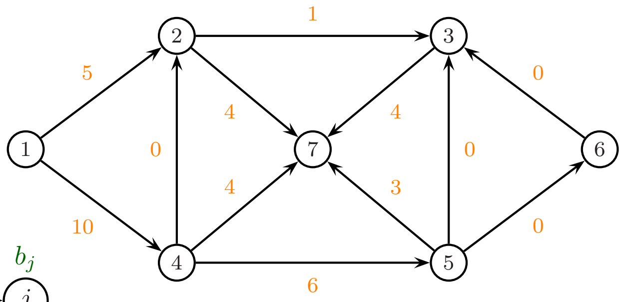
I $(2, 3), (4, 5), (5, 7)$ con $(3, 5), (6, 7), (7, 8)$ — II $(4, 5)$ con $(3, 5)$ — III $(4, 5), (5, 7)$ con $(3, 5), (7, 8)$

e) Modificare il costo del minor numero possibile di archi affinché l'albero a destra sia un albero di copertura di costo minimo. Giustificare la risposta.

c_{35} >= 4 e c_{57} <= 6 garantiscono che anche gli archi individuati al punto c) soddisfino le condizioni di ottimalità per cicli. Un solo arco non basta: gli archi coinvolti nel ciclo creato da $(3, 5)$ costano tutti meno degli archi $(6, 7)$ e $(7, 8)$

3) Si considerino il problema di flusso di costo minimo sul grafo di sinistra e lo pseudoflusso x riportato a destra:





a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Il vettore degli sbilanciamenti è $e_x = (3, 0, -3, 0, 3, 0, -3)$ con sbilanciamento complessivo $g(x) = 0$ — falso

B $\{7, 5, 4, 1\}$ è un cammino aumentante — falso

b) Per quali valori del costo dell'arco $(4, 5)$ lo pseudoflusso risulta minimale?

I $c_{45} \neq -1$ — II $c_{45} \geq 0$ — III $c_{45} \leq 0$

c) Quale dei seguenti è un cammino aumentante di costo minimo?

I $\{5, 3\}$ | II $\{5, 6, 3\}$ | III $\{1, 2, 3\}$

d) Qual è la massima quantità di flusso che si può inviare lungo il cammino aumentante $\{5, 4, 1, 2, 3\}$?

I 3 | II 1 | III 4

e) Come bisogna modificare il bilancio dei nodi e/o il costo degli archi in modo che lo pseudoflusso diventi un flusso ammissibile di costo minimo? Giustificare la risposta.

$b = (-15, 0, -3, 0, 3, 0, 15)$ garantisce l'ammissibilità e la minimalità è preservata (non dipende da b)

4) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$(P) \quad \begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & 3x_2 & \leq & 3 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \end{array}$$

$$(D) \quad \begin{array}{rrcrcrcrcrcl} \min & 2y_1 & + & 3y_2 & + & y_3 & + & 4y_4 & & & & \\ & & & y_2 & - & y_3 & + & 2y_4 & - & y_5 & = & 1 \\ & y_1 & - & 3y_2 & + & y_3 & + & y_4 & & & = & 1 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \geq & 0 \end{array}$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{3, 5\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $\xi = (1, 1)$ è una direzione ammissibile per $x = (0, 1)$ e di crescita per (P) — vero

B $x = (1, 2)$ e $y = (2, 0, -1, 0, 0)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari — vero

b) Quali sono la direzione di crescita ξ e il passo di spostamento $\bar{\lambda}$ individuati alla seconda iterazione dell'algoritmo?

I $\xi = (1, -2)$, $\bar{\lambda} = 8/7$ | II $\xi = (1, 0)$, $\bar{\lambda} = 8$ | III $\xi = (1, 0)$, $\bar{\lambda} = 0$

c) Quali sono le soluzioni ottime individuate dall'algoritmo?

I $\bar{x} = (1, 2)$, $\bar{y} = (2, 0, -1, 0, 0)$ | II $\bar{x} = (1, 2)$, $\bar{y} = (1/2, 0, 0, 1/2, 0)$ | III $\bar{x} = (0, 1)$, $\bar{y} = (0, 0, 1, 0, 2)$

d) Qual è un piano di taglio (di Gomory) che esclude la soluzione ottima $\bar{y}$ trovata alla domanda precedente?

I $y_2 + y_4 + y_5 \leq 1$ | II $y_2 + y_5 \geq 0$ | III $y_2 + y_3 + y_5 \geq 1$

e) Scegliere una diversa funzione obiettivo per (P) in modo tale che il problema (D) abbia un'unica soluzione ottima. Giustificare la scelta effettuata.

$c = (0, -1)$: $x = (0, -1)$ è l'unica soluzione ottima di (P) e risulta non degenere, pertanto la corrispondente soluzione duale di base è l'unica soluzione ottima di (D)

esistono altre scelte corrette

5) Si considerino il problema dello zaino

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl} \max & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 10x_4 & & \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 10x_4 & \leq & 13 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 \in \{0, 1\} & & \end{array}$$

ed il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo *greedy* basato sui rendimenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita in ordine crescente di rendimento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazione sono corrette?

A L'ordinamento delle variabili per rendimento decrescente è x_4, x_3, x_2, x_1 falso

B La soluzione ammissibile di partenza è $(1, 1, 1, 0)$ vero

b) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $v_I = 13, v_S = 16$ II $v_I = 12, v_S = 16$ III $v_I = 10, v_S = 14$

c) Quanti nodi vengono chiusi alla seconda ramificazione e per quale motivo?

I 1 per ammissibilità II nessuno III 1 per inammissibilità

d) Quanti nodi (esclusa la radice) è necessario visitare prima di trovare e certificare una soluzione ottima?

I 6 II 5 III 4

e) Modificare il beneficio di un solo oggetto in modo tale che la soluzione ammissibile di partenza sia ottima. Giustificare la scelta effettuata.

$c_3 = 8$: la soluzione ammissibile fornisce $v_I = 15$ e alla prima ramificazione entrambi nodi vengono chiusi. Un nodo individua la medesima soluzione (come in precedenza) mentre nell'altro adesso si verifica $v_S < v_I$

esistono altre scelte corrette