RICERCA OPERATIVA (a.a. 2022/23)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda a) (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande b), c), d) e si risponda alla domanda finale e).

1) Già fiaccato da secoli di ininterrotta attività e viaggi sempre più faticosi, *Babbo Natale* è stato colpito da un potente virus molto contagioso e dovrà passare le festività natalizie in quarantena. Per garantire comunque a tutti i bambini il giorno di maggior felicità dell'anno, ha convocato i suoi n elfi perché effettuino tutte le consegne. A questo scopo ha fornito a ciascun elfo k una slitta di velocità v_k chilometri al nanosecondo e un fantasmagorico zaino *TiBag* di capacità C_k tonnellate. Il Capo Elfo *Alabastro Palla di Neve* conosce la lista delle m località da visitare e il numero d_i di tonnellate di doni da consegnare in ciascuna località i nonché la distanza chilometrica $d_{h\ell}$ tra ogni coppia di località h e ℓ, Rovaniemi inclusa. Per semplificare il lavoro degli inesperti elfi, Alabastro ritiene ineludibile che le consegne in una località vengano effettuate tutte dallo stesso elfo. Inoltre, per supportare meglio Babbo Natale nella supervisione delle operazioni, lui non si sposterà da Rovaniemi e consegnerà personalmente i doni in città.

Aiuta Babbo Natale a pianificare la consegna dei doni in tutte le località: si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere quali località assegnare a ciascun elfo nonché il tragitto che questi dovrà effettuare partendo da Rovaniemi per ritornarvi solo dopo essere passato esattamente una volta da ogni località assegnata, in modo da minimizzare il massimo tempo di viaggio degli elfi.

Identificata Rovaniemi con $i = 1$ e scelte le famiglie di variabili

$$y_i^k = \begin{cases} 1, & \text{se la località } i \text{ viene assegnata all'elfo } k, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad k = 1, \ldots, n, \ i = 2, \ldots, m,$$

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{l'elfo } k \text{ visiterà la località } j \text{ subito dopo la località } i, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad k = 1, \ldots, n, \ i = 1, \ldots, m, \ j \neq i,$$

parte della formulazione è data dalla funzione obiettivo e dai vincoli riportati qua sotto:

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ & \sum_{k=1}^{n} y_i^k = 1 \qquad i = 2, \ldots, m, \\ & y_i^k \in \{0, 1\} \qquad k = 1, \ldots, n, \ i = 2, \ldots, m, \\ & x_{ij}^k \in \{0, 1\} \qquad k = 1, \ldots, n, \ i = 1, \ldots, m, \ j \neq i, \end{aligned}$$

dove la variabile ausiliaria t fornisce un'approssimazione superiore della massimo tempo di viaggio degli elfi.

a) Selezionare tra i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

A $\quad x_{ij}^k \geq y_i^k \qquad k = 1, \ldots, n, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j \neq i$ — non aggiungere

B $\quad \sum_{i=2}^{m} \sum_{j \neq i} d_i x_{ij}^k \leq C_k \qquad k = 1, \ldots, n$ — non aggiungere

C $\quad \sum_{i=2}^{m} d_i y_i^k \leq C_k \qquad k = 1, \ldots, n$ — aggiungere

D $\quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^k = y_j^k \qquad k = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m, \ j \neq i \quad (\text{ponendo } y_1^k = 1)$ — aggiungere

E $\quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^k = 2y_j^k \qquad k = 1, \ldots, n, \quad i = 1, \ldots, m, \ i \neq j \quad (\text{ponendo } y_1^k = 1)$ — non aggiungere

F $\quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j \neq i} x_{ij}^k \leq \sum_{i \in S} y_i^k - 1 \qquad k = 1, \ldots, n, \quad S \subset \{1, \ldots, m\}, \ 2 \leq |S| \leq m - 1$ — aggiungere

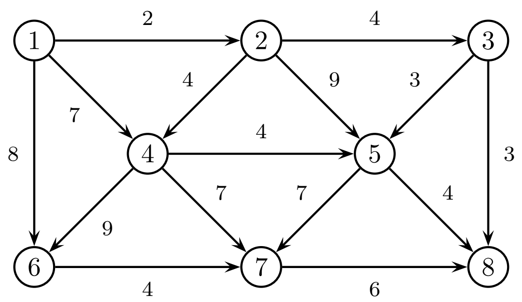
G $\sum_{j=1}^{m} x_{ij}^k = y_i^k \qquad k = 1,\dots,n, \quad i = 1,\dots,m,\ i \neq j \qquad (\text{ponendo } y_1^k = 1)$ aggiungere

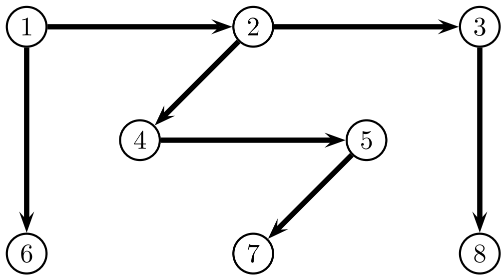
H $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j \neq i} d_{ij} v_k x_{ij}^k \leq t \qquad k = 1,\dots,n$ non aggiungere

I $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j \neq i} d_{ij} x_{ij}^k \leq v_k t \qquad k = 1,\dots,n$ aggiungere

J $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j \neq i} d_{ij} x_{ij}^k \geq v_k t \qquad k = 1,\dots,n$ non aggiungere

2) Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo di sinistra:





a) Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

A Sostituendo l'arco $(5,7)$ con l'arco $(4,7)$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato falso

B Il costo dell'albero è 58 vero

b) Qual è l'insieme di tutti gli archi che non soddisfano le corrispondenti condizioni di Bellman?

I $\{(3,5),(6,7)\}$ II $\{(3,5),(4,7),(6,7)\}$ III $\{(3,5),(4,7)\}$

c) Quali sostituzioni di archi bisogna fare (con alcuni scelti al punto b)) per ottenere un albero dei cammini minimi?

I $(4,5)$ con $(3,5)$ II $(4,5),(5,7)$ con $(3,5),(4,7)$ III $(4,5),(5,7)$ con $(3,5),(6,7)$

d) Qual è il vettore delle etichette di un albero dei cammini minimi?

I $d = (0,2,6,6,9,8,16,9)$ II $d = (0,2,6,6,9,8,13,9)$ III $d = (0,2,6,6,9,8,12,9)$

e) Modificare il costo del minor numero possibile di archi affinché l'albero a destra sia l'unico albero dei cammini minimi. Giustificare la risposta.

$c_{45} < -1$ garantisce che tutte le condizioni di Bellman siano soddisfatte come disuguaglianze

3) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare ed il suo problema duale (D):

$$
(P) \quad \begin{array}{lrcrcl}
\max & 2x_1 & + & \alpha x_2 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & \beta x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 2
\end{array}
$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $\xi = (0,1)$ è una direzione ammissibile per $\bar{x} = (2,1)$ falso

B $\bar{x} = (2,1)$ e $\bar{y} = (\alpha, 0, 0, 2-\alpha, 0)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari vero

b) Se $\beta < 3/2$, quali sono tutti i valori di α per cui $\bar{y} = (\alpha, 0, 0, 2-\alpha, 0)$ è soluzione ottima di (D)?

I $0 \le \alpha \le 2$ II $|\alpha| \le 2$ III $\alpha \ge 0$

c) Se $\beta < 3/2$, quali sono tutti i valori di α per cui $\bar{x} = (2,1)$ è soluzione ottima di (P)?

I $0 \le \alpha \le 2$ II $|\alpha| \le 2$ III $\alpha \in \mathbb{R}$

d) Se $\alpha = \beta = 1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (D)?

I (D) è inf. illimitato II $\{(1,0,0,1,0)\}$ III $\{(t, t-1, 0, 3-2t, 0) : 1 \le t \le 3/2\}$

e) Scegliere valori per α e β in modo tale che (P) sia superiormente illimitato. Giustificare la risposta.

$\beta = 0$ garantisce che $\xi = (-1,-1)$ sia una direzione di recessione del poliedro
$\alpha < -2$ garantisce che ξ sia una direzione di crescita

esistono altre scelte corrette

4) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$
(P)\quad \begin{array}{lrcrcr}
\max & x_1 & - & 2x_2 & & \\
& x_1 & + & x_2 & \le & 5 \\
& x_1 & - & 3x_2 & \le & -1 \\
& x_1 & - & x_2 & \le & 1 \\
& x_1 & & & \le & 3 \\
& & & x_2 & \le & 2
\end{array}
\qquad
(D)\quad \begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\min & 5y_1 & - & y_2 & + & y_3 & + & 3y_4 & + & 2y_5 & & \\
& y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & & & = & 1 \\
& y_1 & - & 3y_2 & - & y_3 & & & + & y_5 & = & -2 \\
& y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \ge & 0
\end{array}
$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{2,5\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $\xi = (2,1)$ è una direzione di recessione della regione ammissibile di (P) falso

B $k = 1$ e $h = 5$ sono l'indice entrante ed uscente individuati alla prima iterazione dell'algoritmo vero

b) Qual è la direzione di spostamento d con il relativo passo $\bar{\theta}$ individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $d = (1,1,0,0,4)$, $\bar{\theta} = 1/4$ II $d = (1,-1,0,0,-4)$, $\bar{\theta} = 1/4$ III $d = (1,-1,0,0,-4)$, $\bar{\theta} = 1$

c) Quali sono le soluzioni ottime di (P) e (D) individuate dall'algoritmo?

I $\bar{x} = (5,2)$, $\bar{y} = (0,1,0,0,1)$ II $\bar{x} = (2,1)$, $\bar{y} = (0,0,1/2,1/2,0)$ III $\bar{x} = (2,1)$, $\bar{y} = (0,1/2,1/2,0,0)$

d) Qual è un piano di taglio (di Gomory) che esclude la soluzione ottima $\bar{y}$ trovata alla domanda precedente?

I $y_4 + y_5 \ge 1$ II $y_3 + y_4 + y_5 \ge 1$ III $y_4 + y_5 \le 1$

e) Modificare un solo vincolo di (P) in modo tale che (D) risulti inferiormente illimitato. Giustificare la scelta effettuata.

Se il primo vincolo viene modificato in $-x_1 - x_2 \leq -5$ la regione ammissibile di (P) diventa vuota e quindi (D) inferiormente illimitato

esistono altre scelte corrette

5) Si considerino il problema dello zaino

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \max & 27x_1 & + & 21x_2 & + & 24x_3 & + & 31x_4 & & \\ & 5x_1 & + & 3x_2 & + & 8x_3 & + & 6x_4 & \leq & 11 \\ & \multicolumn{9}{l}{x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \in \{0,1\}} \end{array}$$

ed il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo *greedy* basato sui rendimenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita in ordine crescente di rendimento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazione sono corrette?

A L'ordinamento delle variabili per rendimento decrescente è x_1, x_2, x_4, x_3 falso

B La soluzione del rilassamento continuo del problema è $(1, 1, 0, 0)$ falso

b) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $v_I = 45, v_S = 48$ II $v_I = 48, v_S = 64$ III $v_I = 48, v_S = 63$

c) Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

I 1 per ammissibilità II nessuno III 1 per inammissibilità

d) Quanti nodi (esclusa la radice) vengono visitati prima di trovare e certificare una soluzione ottima?

I 6 II 4 III 2

e) Modificare il peso di un solo oggetto in modo tale che l'algoritmo alla prima ramificazione non chiuda alcun nodo. Giustificare la scelta effettuata.

$a_2 = 2$: la soluzione ottima del rilassamento continuo nel sottoproblema con $x_3 = 1$ è $(1/5, 1, 1, 0)$ e fornisce $v_S = 50 > V_I$ mentre nel sottoproblema con $x_3 = 0$ coincide con quella già trovata alla radice

esistono altre scelte corrette