## RICERCA OPERATIVA (a.a. 2022/23)

Per ciascun esercizio si individuino l'eventuale correttezza delle affermazioni $a)$, l'unica risposta corretta alle domande $b), c), d), e)$ e si risponda alle domande finali $f)$.

**1)** Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare ed il suo problema duale $(D)$:

$$
(P)\qquad \begin{array}{lrcrcr}
\max & \alpha x_1 & + & \beta x_2 & & \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & -3x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 3
\end{array}
$$

a) La seguente affermazione è corretta?

$\boxed{\text{A}}$ $x = (2,3)$ e $y = (0,0,\alpha,\beta)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari se e solo se $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$ $\boxed{\text{falso}}$

b) Qual è l'insieme di tutte le coppie di valori per cui la soluzione $x = (2,3)$ è ottima per $(P)$?

$\boxed{\text{I}}$ $\{(\alpha,\beta)\ :\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0\}$ $\boxed{\text{II}}$ $\{(\alpha,\beta)\ :\ \alpha \geq -\beta,\ \beta \geq 0\}$ $\boxed{\text{III}}$ $\{(\alpha,\beta)\ :\ \beta \geq |\alpha|\}$

c) Qual è l'insieme di tutte le coppie di valori per cui la soluzione $y = (0,0,\alpha,\beta)$ è ottima per $(D)$?

$\boxed{\text{I}}$ $\{(\alpha,\beta)\ :\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0\}$ $\boxed{\text{II}}$ $\{(\alpha,\beta)\ :\ \alpha \geq -\beta,\ \beta \geq 0\}$ $\boxed{\text{III}}$ $\{(\alpha,\beta)\ :\ \beta \geq |\alpha|\}$

d) Se $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di $(P)$?

$\boxed{\text{I}}$ $\{(2,3)\}$ $\boxed{\text{II}}$ $\{(t, 3t-1)\ :\ t \leq 2\}$ $\boxed{\text{III}}$ $\{(t, t+1)\ :\ 1 \leq t \leq 2\}$

e) Se $\alpha = -1$ e $\beta = 0$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di $(D)$?

$\boxed{\text{I}}$ $\{(0,0,-1,0)\}$ $\boxed{\text{II}}$ $\{(0,0,t,0)\ :\ 0 \leq t \leq 1\}$ $\boxed{\text{III}}$ $\emptyset$

f) $\boxed{\text{A}}$ Si scelgano valori per $\alpha$ e $\beta$ tali che esistano infinite soluzione ottime ma $x = (2,3)$ sia l'unica soluzione ottima di base. Giustificare la scelta effettuata.

$\alpha = 1,\ \beta = 0$: la semiretta $\{(2, 3-t)\ :\ t \geq 0\}$ è l'insieme delle soluzioni ottime (ciascuna in scarti complementari con la soluzione duale ammissibile $y = (0,0,1,0)$)

$\boxed{\text{B}}$ Individuare una direzione ammissibile per $x = (1,2)$ che sia anche di crescita quando $\alpha = 1$ e $\beta = 0$. Giustificare la scelta effettuata.

una qualsiasi direzione nel cono $\{\xi \in \mathbb{R}^2\ :\ \xi_2 \leq \xi_1,\ \xi_1 > 0\}$: infatti $\xi$ è
- una direzione di crescita se e solo se $\xi_1 > 0$
- una direzione ammissibile per $x = (1,2)$ se e solo se $\xi_2 \leq \min\{3\xi_1, \xi_1\}$

**2)** Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$
(P)\qquad \begin{array}{lrcrcr}
\max & -2x_1 & + & x_2 & & \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & -3x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 3
\end{array}
\qquad\qquad
(D)\qquad \begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\min & y_1 & - & y_2 & + & 5y_3 & + & 2y_4 & + & 3y_5 & & \\
 & -y_1 & - & 3y_2 & + & y_3 & + & y_4 & & & = & -2 \\
 & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & + & y_5 & = & 1 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{4, 5\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A La direzione $\xi = (-1, -1)$ è ammissibile per $x = (1, 2)$ falso

B Le soluzioni di base individuate alla prima iterazione dell'algoritmo sono $\bar{x} = (2, 3)$ e $\bar{y} = (0, 0, 0, -2, 1)$ vero

b) Quali sono la direzione di crescita $\xi$ e il passo di spostamento $\bar{\lambda}$ individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $\xi = (0, -1)$, $\bar{\lambda} = +\infty$ II $\xi = (-1, 0)$, $\bar{\lambda} = 0$ III $\xi = (-1, -1)$, $\bar{\lambda} = 1$

c) Quali sono le soluzioni ottime individuate dall'algoritmo?

I $\bar{x} = (2, 3)$, $\bar{y} = (1/2, 1/2, 0, 0, 0)$ II $\bar{x} = (1, 2)$, $\bar{y} = (2, 0, 0, 0, 0)$ III $\bar{x} = (1, 2)$, $\bar{y} = (1/2, 1/2, 0, 0, 0)$

d) Qual è un piano di taglio (di Gomory) che esclude la soluzione ottima $\bar{y}$ trovata alla domanda precedente?

I $y_1 + y_2 \geq 2$ II $y_3 + y_4 + y_5 \geq 2$ III $y_4 + y_5 \geq 1$

e) Qual è il cono delle direzioni di recessione della regione ammissibile di $(P)$?

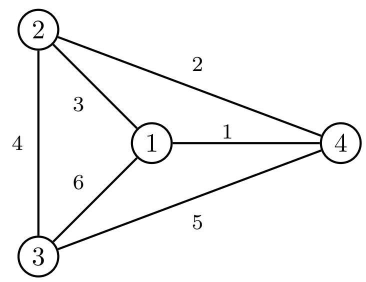
I $\{\xi \in \mathbb{R}^2 \ : \ \xi_2 \leq 3\xi_1, \ \xi_1 \leq 0\}$ II $\{\xi \in \mathbb{R}^2 \ : \ \xi_2 \leq \xi_1, \ \xi_1 \leq 0\}$ III $\{\xi \in \mathbb{R}^2 \ : \ \xi_2 \leq -|\xi_1|\}$

f) Scegliere un differente vettore di termini noti per il problema $(D)$ in modo tale che $(P)$ risulti superiormente illimitato. Giustificare la scelta effettuata.

qualsiasi direzione di recessione individuata al punto *e*): il vettore di termini noti di $(D)$ è la funzione obiettivo di $(P)$

esistono altre scelte corrette

**3)** Si considerino il problema del ciclo hamiltoniano di costo minimo sul seguente grafo




ed il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando il 1-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita per costo crescente degli archi, e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) La seguente affermazione è corretta?

A L'arco $(1, 3)$ appartiene alla soluzione ammissibile di partenza vero

b) Quali archi appartengono all'1-albero di costo minimo?

I $(1, 4), (3, 4)$ II $(1, 2), (1, 3)$ III $(2, 3), (2, 4)$

c) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $v_I = 10, v_S = 13$ II $v_I = 13, v_S = 10$ III $v_I = 13, v_S = 13$

d) Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

I 1 per $v_I(P_i) > v_S(P_i)$ II nessuno III 1 per inammissibilità

e) Quanti nodi vengono chiusi alla terza ramificazione e per quale motivo?

I 1 per ammissibilità II nessuno III 2 per $\begin{cases}\text{inammissibilità}\\ \text{ammissibilità}\end{cases}$

f) Scambiare il costo di 2 archi in modo tale che l'algoritmo termini alla radice. Giustificare la scelta effettuata.

$(1, 2)$ e $(1, 3)$ oppure $(2, 4)$ e $(3, 4)$: 1-albero di partenza è ammissibile