

RICERCA OPERATIVA (a.a. 2022/23)

1) Grazie alle ingenti risorse del *Piano Nazionale Spreco Soldi* il neodirettore del Dipartimento di *Pseudofomatica*, professor *Vittorio Umbrella*, dispone di un finanziamento di C cattedre d'oro per assumere nuovi docenti delle m categorie previste dal Ministero. L'assunzione di un docente di categoria j comporta una spesa di c_j cattedre d'oro, mentre le regole del piano impongono che le assunzioni per ciascuna categoria non possano superare il 40% del numero totale di assunzioni. Il dipartimento è suddiviso in n aree pseudoscientifiche e servono almeno d_i docenti di ciascuna area i per coprire l'incremento di esigenze didattiche. Il direttore ha stimato che l'assunzione di un docente di categoria j nell'area i otterrà a_{ij} voti favorevoli dei componenti del dipartimento.

Aiuta il direttore a predisporre un piano di assunzioni, formulando in termini di P.L.I. il problema di decidere quanti e quali docenti assumere nel rispetto delle regole del *PNSS* soddisfacendo le esigenze didattiche con l'obiettivo di spendere almeno il 90% del finanziamento e di massimizzare il minimo numero di voti favorevoli che ciascuna proposta otterrà.

Scelte le famiglia di variabili

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il piano prevede l'assunzione di docenti di categoria } j \text{ nell'area } i, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m,$$

x_{ij} = numero di docenti di categoria j da assumere nell'area i ,

parte della formulazione è data dalla funzione obiettivo e dai vincoli riportati sotto:

$$\begin{aligned} \max \quad & v \\ & \sum_{j=1}^m x_{ij} \geq d_i \quad i = 1, \dots, n, \\ & y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned}$$



dove la variabile ausiliaria v fornisce un'approssimazione inferiore del minimo numero di voti favorevoli per ciascuna tipologia di proposta.

Selezionare tra i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare **correttamente** la formulazione.

- | | | |
|----------------------------|--|---|
| <input type="checkbox"/> A | $x_{ij} \leq C y_{ij} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$ | <input type="checkbox"/> non aggiungere |
| <input type="checkbox"/> B | $c_j x_{ij} y_{ij} \leq C \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$ | <input type="checkbox"/> non aggiungere |
| <input type="checkbox"/> C | $9C \leq 10 \sum_{j=1}^m c_j \left(\sum_{i=1}^n x_{ij} \right) \leq 10C$ | <input type="checkbox"/> aggiungere |
| <input type="checkbox"/> D | $c_j x_{ij} \leq C y_{ij} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$ | <input type="checkbox"/> aggiungere |
| <input type="checkbox"/> E | $0.9C \leq \sum_{j=1}^m c_j \left(\sum_{i=1}^n y_{ij} \right) \leq C$ | <input type="checkbox"/> non aggiungere |
| <input type="checkbox"/> F | $\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq 0.4 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{ij} \quad i = 1, \dots, n$ | <input type="checkbox"/> non aggiungere |
| <input type="checkbox"/> G | $v \leq a_{ij} y_{ij} + \left(\sum_{\ell=1}^m \sum_{k=1}^n a_{k\ell} \right) (1 - y_{ij}) \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$ | <input type="checkbox"/> aggiungere |
| <input type="checkbox"/> H | $\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq 0.4 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{ij} \quad j = 1, \dots, m$ | <input type="checkbox"/> aggiungere |
| <input type="checkbox"/> I | $v \leq a_{ij} y_{ij} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$ | <input type="checkbox"/> non aggiungere |
| <input type="checkbox"/> J | $v \leq a_{ij} x_{ij} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$ | <input type="checkbox"/> non aggiungere |

2) I venti di guerra con l'Impero Klingon hanno spinto il governo della *Federazione dei Pianeti Uniti* a stanziare C crediti federali per la realizzazione di basi di intercettazione spaziale a protezione degli n pianeti ritenuti più esposti al rischio di attacchi. I tecnici dell'*Ammiraglio Bill*, comandante supremo della *Flotta Astrale*, hanno individuato m satelliti artificiali idonei ad ospitare le basi. Le tecnologie più avanzate disponibili permettono ad una base di proteggere un pianeta distante al più D^+ secondi-luce e più pianeti contemporaneamente se la distanza $d_{k\ell}$ tra ciascuna coppia (k, ℓ) di questi fosse non superiore a D^- . Una base sul satellite j sarebbe in grado di proteggerne fino a p_j , il costo della sua realizzazione ammonta a c_j crediti federali mentre le attrezzature necessarie alla protezione del pianeta i costano v_i crediti e la distanza massima del satellite j dal pianeta i è d_{ij} secondi-luce.

Aiuta l'ammiraglio ad elaborare un piano di costruzione delle basi e protezione dei pianeti: si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere su quali satelliti costruire basi e quali pianeti proteggere da ciascuna di esse nel rispetto dello stanziamento assegnato e dei vincoli tecnologici realizzando al più k basi con l'obiettivo di massimizzare il numero di pianeti protetti ma garantendo comunque la presenza di una base a distanza di potenziale protezione da ciascun pianeta.

Schematizzate le distanze massime tra pianeti e satelliti attraverso la matrice di dati di coefficienti

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } d_{ij} \leq D^+, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m,$$

e scelte le famiglie di variabili

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se viene costruita una base sul satellite } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad j = 1, \dots, m,$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il pianeta } i \text{ viene protetto dalla base sul satellite } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m,$$

parte della formulazione è data dai vincoli riportati qua sotto:

max

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_{ij} \leq 1 \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^m y_j \leq k$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$



Selezionare tra le funzioni obiettivo ed i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare **correttamente** la formulazione.

A $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_{ij}$ (funzione obiettivo)

aggiungere

B $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j$ (funzione obiettivo)

non aggiungere

C $\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j = 1 \quad i = 1, \dots, n$

non aggiungere

D $\sum_{j=1}^m (c_j y_j + \sum_{i=1}^n v_i a_{ij} x_{ij}) \leq C$

aggiungere

E $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (c_j y_j + v_i a_{ij} x_{ij}) \leq C$

non aggiungere

F $d_{k\ell}(a_{kj} x_{kj} + a_{\ell j} x_{\ell j} - 1) \leq D^- \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad \ell = k+1, \dots, n$

aggiungere

G $\sum_{i=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq p_j y_j \quad j = 1, \dots, m$

aggiungere

H $d_{k\ell}(a_{kj} x_{kj} + a_{\ell j} x_{\ell j}) \leq D^- y_j \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad \ell = k+1, \dots, n$

non aggiungere

$$\boxed{\text{I}} \quad \sum_{j=1}^m p_j y_j \leq \sum_{j=1}^m a_{ij} x_{ij} \quad i = 1, \dots, n$$

non aggiungere

$$\boxed{\text{J}} \quad \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \geq 1 \quad i = 1, \dots, n$$

aggiungere