RICERCA OPERATIVA (a.a. 2021/22)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda a) (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande b), c), d) e si risponda alla domanda finale e).

1) La *Repubblica degli Incrollabili Idealisti* dipende per il suo fabbisogno di gas naturale interamente dalle forniture dell'*Impero delle Sterminate Steppe*. L'ultimo contratto siglato prevede, su arco temporale di 26 settimane, una fornitura di f_i milioni di metri cubi all'inizio di ciascuna settimana i a fronte di un fabbisogno effettivo θ_i. A causa delle forti tensioni geopolitiche tra i due paesi, l'Imperatore ha unilateralmente deciso un taglio percentuale τ_i della fornitura prevista per ciascuna settimana; in risposta il *Ministro Idealista dell'Energia* ha ottenuto dai paesi alleati una fornitura straordinaria di a_i milioni di metri cubi, comunque non sufficiente a coprire il taglio annunciato, mentre i suoi tecnici hanno stimato essere c_i la massima compressione percentuale del fabbisogno che è possibile sostenere. La Repubblica dispone inoltre di una riserva di L milioni di metri cubi già stoccati e ha una capacità complessiva di stoccaggio pari a M.

Aiuta il Ministro a predisporre un piano sostenibile di razionamento dei consumi nelle prossime 26 settimane, formulando in termini di P.L.I. il problema di stabilire quanto comprimere il fabbisogno in ciascuna settimana nel rispetto delle forniture previste e della capacità di stoccaggio con l'obiettivo di massimizzare il fabbisogno complessivamente soddisfatto.

Scelte le famiglie di variabili

$$\begin{aligned} x_i &= \text{milioni di metri cubi di fabbisogno soddisfatto nella settimana } i \\ y_i &= \text{milioni di metri cubi stoccati al termine della settimana } i \end{aligned} \qquad i = 1, \dots, 26,$$

e fissata $y_0 = L$, parte della formulazione è data data dalla funzione obiettivo e dai vincoli riportati qua sotto:

$$\max \sum_{i=1}^{26} x_i$$

$$x_i \le \theta_i \qquad i = 1, \dots, 26.$$

$$y_i \le M \qquad i = 1, \dots, 26.$$

a) Selezionare tra i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

A $x_i \ge (1 - 0.01c_i)\theta_i \quad i = 1, \dots, 26$ aggiungere

B $x_i \ge 0.01c_i\theta_i \quad i = 1, \dots, 26$ non aggiungere

C $y_i = y_{i-1} + (1 - 0.01\tau_i)f_i + a_i - x_i \quad i = 1, \dots, 26$ aggiungere

D $y_i = y_{i-1} + 0.01\tau_i f_i + a_i - x_i \quad i = 1, \dots, 26$ non aggiungere

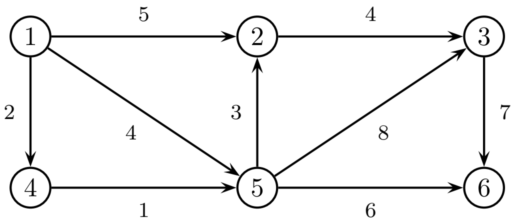
E $x_i \ge y_{i-1} + 0.01\tau_i f_i + a_i \quad i = 1, \dots, 26$ non aggiungere

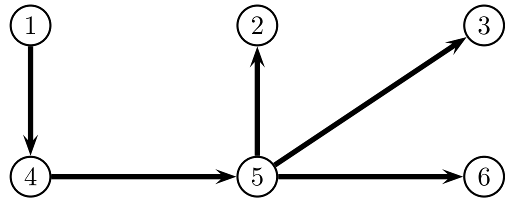
F $x_i \le y_{i-1} + (1 - 0.01\tau_i)f_i + a_i \quad i = 1, \dots, 26$ aggiungere

G $x_i \ge y_{i-1} + (1 - 0.01\tau_i)f_i + a_i \quad i = 1, \dots, 26$ non aggiungere

H $y_i \ge (1 - 0.01)c_{i+1}\theta_{i+1} \quad i = 1, \dots, 25$ non aggiungere

2) Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo di sinistra:





a) Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

A $d = (0, 5, 11, 2, 3, 9)$ è il vettore delle etichette relative all'albero — falso

B Il costo dell'albero è 20 — falso

b) Quale coppia di archi non soddisfano le corrispondenti condizioni di Bellman?

I $(1, 2), (1, 5)$ II $(1, 2), (2, 3)$ III $(1, 5), (2, 3)$

c) Quali archi bisogna sostituire nell'albero con quelli scelti al punto b) per ottenere un albero dei cammini minimi?

I $(4, 5), (5, 3)$ II $(4, 5), (5, 2)$ III $(5, 2), (5, 3)$

d) Qual è il vettore delle etichette di un albero dei cammini minimi?

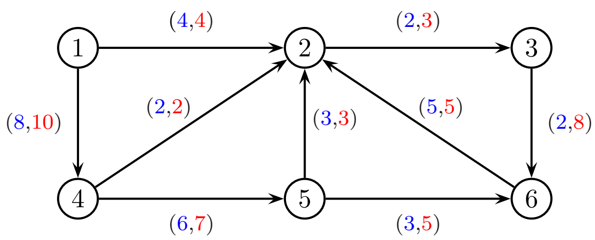
I $d = (0, 5, 11, 2, 3, 9)$ II $d = (0, 6, 9, 2, 3, 9)$ III $d = (0, 5, 9, 2, 3, 9)$

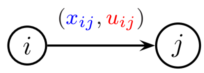
e) Modificare il costo del minor numero possibile di archi affinché l'albero a destra sia l'unico albero dei cammini minimi. Giustificare la risposta.

$c_{12} > 6$ e $c_{23} > 5$ garantiscono che tutte le condizioni di Bellman siano soddisfatte come disuguaglianze

esistono altre scelte corrette

3) Si consideri il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 2 sul grafo seguente:





a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Il valore del flusso è 14 — falso

B La capacità del taglio $(\{1, 3, 4, 5, 6\}, \{2\})$ è 14 — vero

b) Qual è un cammino aumentante?

I $\{1, 4, 5, 6, 2\}$ II $\{1, 4, 5, 6, 3, 2\}$ III non ne esistono

c) Quale dei seguenti è un taglio di capacità minima?

I $(\{1, 4, 5, 6\}, \{2, 3\})$ II $(\{1, 4\}, \{2, 3, 5, 6\})$ III $(\{1, 3, 4, 5, 6\}, \{2\})$

d) Qual è il valore del flusso massimo?

I 12 II 13 III 14

e) Scegliere una coppia di archi in modo tale che aumentare di 1 unità la capacità di entrambi faccia aumentare il valore del flusso massimo di 2 unità. Giustificare la risposta.

$(1,2)$ e $(2,4)$: si creano i cammini aumentanti $\{1,2\}$ e $\{1,4,2\}$ entrambi di capacità 1

4) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$(P) \quad \begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & -3x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{rrcrcrcrcr} \min & 4y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & + & 2y_4 & & \\ & y_1 & - & 3y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = & 1 \\ & 2y_1 & + & y_2 & - & y_3 & & & = & 1 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0. \end{array}$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{2,4\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $x = (2,1)$ e $y = (0,0,-1,2)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari vero

B $\xi = (1,1)$ è una direzione ammissibile per $x = (0,0)$ e di crescita per (P) vero

b) Quali sono gli indici entrante k ed uscente h nonché il passo di spostamento $\bar{\theta}$ individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $k = 1,\ h = 2,\ \bar{\theta} = 1/2$ II $k = 1,\ h = 4,\ \bar{\theta} = 4/7$ III $k = 3,\ h = 2,\ \bar{\theta} = 1$

c) Qual è la soluzione ottima di (D) individuata dall'algoritmo?

I $\bar{y} = (1/2, 0, 0, -1/2)$ II $\bar{y} = (0,1,0,4)$ III $\bar{y} = (1/2, 0, 0, 1/2)$

d) Qual è un piano di taglio (di Gomory) che esclude la soluzione ottima $\bar{y}$ trovata alla domanda precedente?

I $y_2 + y_3 \geq 1$ II $y_1 + y_4 \geq 2$ III $y_2 + y_3 \leq 1$

e) Scegliere una diversa funzione obiettivo per (P) in modo tale che l'unica soluzione ottima di (P) resti ottima mentre la soluzione ottima di (D) individuata al punto c) non risulti più tale. Giustificare la scelta effettuata.

$x = (2,1)$ è soluzione ottima e degenere con vincoli attivi $I(x) = \{1,3,4\}$. Scegliendo $c = (1,-1)$, la base $B = \{1,4\}$ non è più duale ammissibile mentre tale resta $B = \{1,3\}$ con $y = (0,0,1,0)$ soluzione ottima associata

esistono altre scelte corrette

5) Si considerino il problema dello zaino

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} \max & 22x_1 & + & 21x_2 & + & 18x_3 & + & 16x_4 & & \\ & 6x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 4x_4 & \leq & 7 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 \in \{0,1\} & & \end{array}$$

ed il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo *greedy* basato sui rendimenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita in ordine crescente di rendimento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazione sono corrette?

A L'ordinamento delle variabili per rendimento decrescente è x_2, x_4, x_3, x_1 falso

B La soluzione ammissibile di partenza è $(0, 1, 0, 1)$ vero

b) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $v_I = 37, v_S = 40$ II $v_I = 37, v_S = 41$ III $v_I = 34, v_S = 37$

c) Quanti nodi vengono chiusi alla seconda ramificazione e per quale motivo?

I 2 per ammissibilità II nessuno III 2 per $v_S < v_I$

d) Su quante e quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I 2: x_3, x_1 II 3: x_3, x_1, x_4 III 4: x_3, x_1, x_4, x_2

e) Modificare il peso di un solo oggetto in modo tale che l'algoritmo alla prima ramificazione non chiuda alcun nodo. Giustificare la scelta effettuata.

$p_3 = 6$: le soluzioni dei rilassamento continui nei sottoproblemi con $x_3 = 0$ e $x_3 = 1$ non sono ammissibili e forniscono rispettivamente le valutazioni superiori $v_S = 40$ e $v_S = 39$