RICERCA OPERATIVA (a.a. 2021/22)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda *a*) (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande *b*), *c*), *d*) e si risponda alla domanda finale *e*).

1) La pace è tornata a regnare nel pianeta *TriSolaris* dopo anni di devastanti guerre tra le sue n regioni. Pertanto, l'*Unione dei Pianeti Pacifici* intende mettere a disposizione del consiglio dei *tre Consoli Solari* del pianeta ingenti finanziamenti per la ricostruzione delle infrastrutture su un arco temporale di t anni. La disponibilità è soggetta a precise condizioni per preservare lo stato di pace: nell'anno j il finanziamento ammonterà a M_j milioni di helios d'oro purché gli investimenti portino alla fine dell'anno ad una differenza delle percentuali di infrastrutture funzionanti non superiore al 10%, calcolate in rapporto a quelle pre-esistenti ai conflitti, tra ciascuna coppia di regioni. A seguito di estensive ricognizioni nel pianeta risulta che il c_i% delle infrastrutture della regione i sono distrutte, mentre l'ufficio statistorico ha stimato che ciascun milione di helios d'oro investito nella medesima regione garantirebbe la ricostruzione di una percentuale a_i delle infrastrutture e porterebbe r_i milioni l'anno come ritorno atteso dell'investimento.

Aiuta i *Consoli Solari* a predisporre il piano di investimenti da proporre all'unione, formulando in termini di P.L.I. il problema di stabilire quanti milioni investire nelle infrastrutture di ogni regione nei vari anni del piano nel rispetto del finanziamento assegnato e dei vincoli richiesti con l'obiettivo di massimizzare il ritorno atteso complessivo nel pianeta.

Scelta la famiglia di variabili

$$x_{ij} = \text{milioni di helios d'oro investiti nella regione } i \text{ nell'anno } j \qquad i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, t$$

parte della formulazione è data dai vincoli riportati qua sotto:

$$\max$$

$$\sum_{j=1}^{t} x_{ij} \le c_i/a_i \qquad i = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, t.$$

a) Selezionare tra le funzioni obiettivo ed i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

A $\displaystyle\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{n} (t-j+1) r_i x_{ij}$ (funzione obiettivo) — aggiungere

B $\displaystyle\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{n} r_i x_{ij}$ (funzione obiettivo) — non aggiungere

C $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_{ij} \le M_k - M_{k-1} \quad i = 1, \dots, n, \ k = 2, \dots, t$ — non aggiungere

D $\displaystyle\sum_{j=1}^{t} x_{ij} \le M_t \quad i = 1, \dots, n$ — non aggiungere

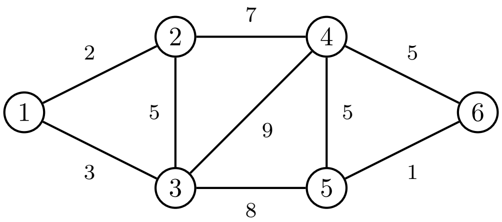
E $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le M_j \quad j = 1, \dots, t$ — aggiungere

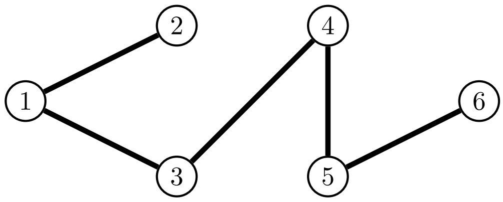
F $\displaystyle a_i \sum_{j=1}^{k} x_{ij} - a_h \sum_{j=1}^{k} x_{hj} \le 10 + c_i - c_h \quad k = 1, \dots, t, \ i = 1, \dots, n, \ h = 1, \dots n, \ h \ne i$ — aggiungere

G $a_i x_{ij} - a_h x_{hj} \le 10 + c_i - c_h \quad j = 1, \dots, t, \ i = 1, \dots, n, \ h = 1, \dots n, \ h \ne i$ — non aggiungere

H $x_{ij} - x_{hj} \le 10 + c_i/a_i - c_h/a_h \quad j = 1, \dots, t, \ i = 1, \dots, n, \ h = 1, \dots n, \ h \ne i$ — non aggiungere

2) Si considerino il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul grafo di sinistra e l'albero riportato a destra:





a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Sostituendo l'arco $(4,5)$ con l'arco $(2,3)$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato — falso

B Il costo di un albero di copertura di costo minimo è 17 — falso

b) Quali archi non soddisfano la condizione di ottimalità per tagli?

I $(3,4)$ — II $(1,2),(4,5)$ — III $(1,3),(3,4),(5,6)$

c) Quali archi non soddisfano la condizione di ottimalità per cicli?

I $(2,3),(3,5)$ — II $(2,4),(3,5)$ — III $(2,3),(2,4),(4,6)$

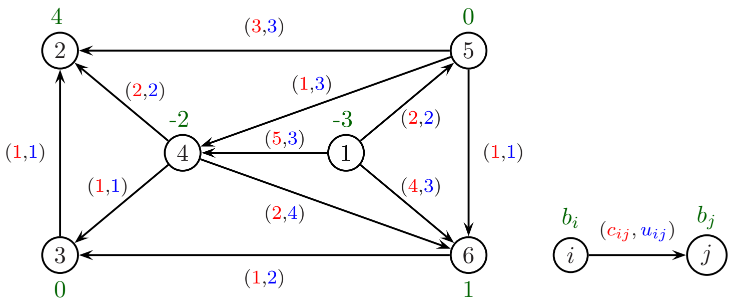
d) Quanti alberi di copertura di costo minimo esistono nel grafo?

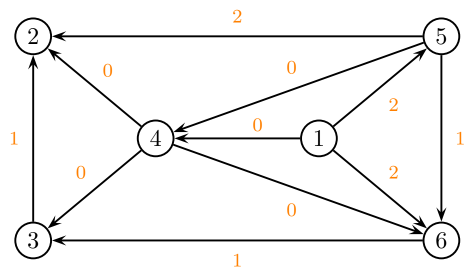
I 1 — II 4 — III 2

e) Modificare il costo di un solo arco dell'albero a destra in modo tale che sia un albero di copertura di costo minimo. Giustificare la risposta

$c_{34} \leq 7$ cosicché anche quest'arco soddisfi le condizioni di ottimalità per tagli

3) Si considerino il problema di flusso di costo minimo sul grafo di sinistra e lo pseudoflusso x riportato a destra:





a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Il vettore degli sbilanciamenti è $e_x = (-1,-1,0,2,-1,1)$ con sbilanciamento complessivo $g(x) = 6$ — falso

B Lo pseudoflusso è ammissibile — falso

b) Per quali valori del costo dell'arco $(5,6)$ lo pseudoflusso risulta minimale?

I $c_{56} \leq 2$ — II $c_{56} \geq 2$ — III nessuno

c) Qual è la massima quantità di flusso che si può inviare lungo il cammino aumentante $\{4,6,1\}$?

I $\theta = 1$ — II $\theta = 4$ — III $\theta = 3$

d) Quale dei seguenti è un cammino aumentante di costo minimo?

I $\{1, 4, 2, 5\}$ II $\{4, 6, 1\}$ III $\{4, 3, 6, 5, 1\}$

e) Com'è possibile modificare il valore di x su un solo arco in modo che lo pseudoflusso risultante non sia minimale? Giustificare la risposta.

$x_{14} = 3$: nel grafo residuo si crea il ciclo $\{4, 1, 6, 5\}$ di costo -1

esistono altre scelte corrette

4) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$(P)\quad \begin{array}{rrcrcl} \max & 2x_1 & + & x_2 & & \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & & & -x_2 & \leq & 0 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{rrrrrrrrrrl} \min & & & & & 2y_3 & + & 3y_4 & + & 2y_5 & \\ & -y_1 & & & & & + & y_4 & + & y_5 & = 2 \\ & & & -y_2 & + & y_3 & + & y_4 & & & = 1 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \geq 0 \end{array}$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{1, 3\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Non esistono direzioni di recessione (non nulle) della regione ammissibile di (P) vero

B $x = (0, 0)$ e $y = (-2, -1, 0, 0, 0)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari vero

b) Quali sono la direzione di crescita ξ e il passo di spostamento $\bar{\lambda}$ individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $\xi = (1, 1)$, $\bar{\lambda} = 0$ II $\xi = (1, 0)$, $\bar{\lambda} = 1$ III $\xi = (-1, 0)$, $\bar{\lambda} = 1$

c) Quali sono le soluzioni ottime individuate dall'algoritmo?

I $\bar{x} = (1, 2)$, $\bar{y} = (0, 0, -1, 2, 0)$ II $\bar{x} = (1, 2)$, $\bar{y} = (0, 0, 1, 2, 0)$ III $\bar{x} = (2, 1)$, $\bar{y} = (0, 0, 0, 1, 1)$

d) Qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (P)?

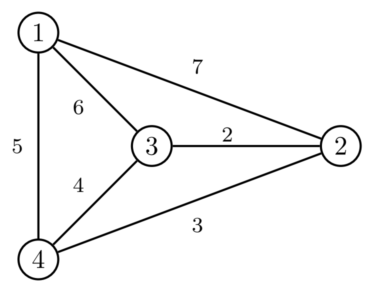
I $\{(1, 2)\}$ II $\{(2, 1)\}$ III $\{(1 + t, 2 - t) : 0 \leq t \leq 1\}$

e) Scegliere una diversa funzione obiettivo per (P) in modo tale che il problema abbia infinite soluzioni ottime. Giustificare la scelta effettuata.

$c = (1, 1)$: tutto il segmento indicato al punto d) III è costituito da soluzioni ottime

esistono altre scelte corrette

5) Si considerino il problema del ciclo hamiltoniano di costo minimo sul seguente grafo



ed il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando il 3-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita per costo crescente degli archi, e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A L'arco $(1,3)$ appartiene alla soluzione ammissibile di partenza vero

B Gli archi $(1,4)$ e $(3,4)$ appartengono al 3-albero di costo minimo vero

b) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $v_I = 14, v_S = 18$ II $v_I = 14, v_S = 16$ III $v_I = 12, v_S = 16$

c) Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

I 1 per $v_I(P_i) > v_S(P_i)$ II nessuno III 1 per inammissibilità

d) Quanti nodi vengono chiusi alla seconda ramificazione e per quale motivo?

I 1 per inammissibilità II nessuno III 1 per ammissibilità

e) Modificare il costo di 1 solo arco in modo tale che l'algoritmo termini alla radice. Giustificare la scelta effettuata.

$c_{13} < 4$: il 3-albero calcolato alla radice è ammissibile

esistono altre scelte corrette