RICERCA OPERATIVA (a.a. 2021/22)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda *a*) (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande *b*), *c*), *d*) e si risponda alla domanda finale *e*).

1) Per prepararsi a contrastare le mire imperialiste della *Confederazione dei Regni degli Orchi Autarchici*, il Consiglio dei Ministri della *Repubblica dei Draghetti* ha previsto la costruzione di n nuove basi militari sul proprio territorio nonostante la contrarietà di una significativa parte della popolazione. I Ministeri della difesa e delle infrastrutture hanno individuato una località adatta in m aree di interesse strategico e stimato un costo di c_{ij} lapilluli di piombo per costruire la base i nell'area j. L'Istituto Nazionale dei Dati ha stimato un livello p_j di dissenso della popolazione dell'area j verso la presenza di una nuova base, mentre il Ministero dello sviluppo economico ha valutato un incremento di u_{ij} milioni della *Carbonella Interna Lorda* che la costruzione della base i porterebbe nella medesima area. Visto che il Ministero delle finanze ha messo a disposizione un budget di soli C lapilluli di piombo, il Consiglio ha deciso che dovranno essere costruite almeno k delle n basi previste ma garantendo un incremento della CIL non inferiore a U_j milioni in ciascuna delle aree j in cui verrà costruita una base.

Aiuta il *Primo Draghetto* a predisporre il piano per la costruzione delle basi, formulando in termini di P.L.I. il problema di stabilire quali basi costruire e in quali aree nel rispetto del finanziamento assegnato e di tutti i vincoli richiesti dal Consiglio con l'obiettivo di minimizzare il livello di dissenso complessivo della popolazione.

Scelta le famiglie di variabili

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se la base } i \text{ viene costruita nell'area } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n, \;\; j = 1, \dots, m,$$

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se viene costruita una base nell'area } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad j = 1, \dots, m,$$

parte della formulazione è data dai vincoli riportati qua sotto:

$$\begin{array}{lll} \min & & \\ & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq 1 & i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \leq C & \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1, \dots, n, \;\; j = 1, \dots, m. \end{array}$$

a) Selezionare tra le funzioni obiettivo ed i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

A $\sum_{i=1}^{n} p_j x_{ij}$ (funzione obiettivo) — non aggiungere

B $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_j x_{ij}$ (funzione obiettivo) — aggiungere

C $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq y_j \qquad j = 1, \dots, m$ — aggiungere

D $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq y_j \qquad j = 1, \dots, m$ — non aggiungere

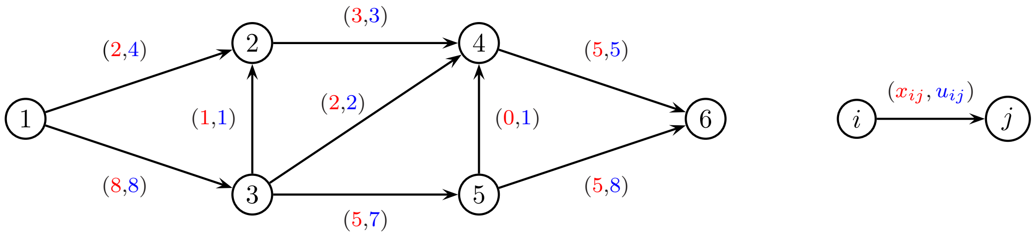
E $\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} u_{ij} x_{ij} \geq \sum_{j=1}^{m} U_j y_j$ — non aggiungere

F $\sum_{i=1}^{n} u_{ij} x_{ij} \geq U_j y_j \qquad j = 1, \dots, m$ — aggiungere

G $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq k$ aggiungere

H $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq k \qquad j = 1,\ldots,m$ non aggiungere

2) Si consideri il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sul grafo seguente:



a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Il valore del flusso nel taglio $(\{1,2\},\{3,4,5,6\})$ è 12. falso

B La capacità del taglio $(\{1,2,4\},\{3,5,6\})$ è 13. vero

b) Qual è un cammino aumentante?

I $\{1,3,5,6\}$ II $\{1,2,3,5,6\}$ III non ne esistono

c) Quale dei seguenti è un taglio di capacità minima?

I $(\{1,2\},\{3,4,5,6\})$ II $(\{1,2,3\},\{4,5,6\})$ III $(\{1,2,4\},\{3,5,6\})$

d) Aumentando la capacità dell'arco $(3,2)$ a $u_{32} = 3$, di quanto aumenta il valore del flusso massimo?

I 2 II 1 III 0

e) Modificare la capacità di archi incidenti nel nodo 3 in modo tale che il flusso riportato in figura sia massimo. Giustificare la risposta.

$u_{35} = 5$: la capacità del taglio $(1,2,3,4,5,6)$ risulta 10 così come il valore del flusso

3) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare ed il suo problema duale (D):

$$(P)\quad \begin{array}{rrcrcr} \max & \alpha x_1 & - & x_2 & & \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \end{array}$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Se $\alpha > 0$, allora (P) è superiormente illimitato falso

B $\bar{x} = (1,0)$ e $\bar{y} = (0,0,(1-\alpha)/2,(1+\alpha)/2)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari vero

b) Se $\alpha = 1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (P)?

I $\{(2,1)\}$ II $\{(t, t-1) : 1 \leq t \leq 2\}$ III $\{(0,1)\}$

c) Se $\alpha = -1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (D)?

I $\{(0, 0, (1 - t), (1 + t))/2 : -1 \leq t \leq 1\}$ II (D) è inferiormente illimitato III $\{(0, 0, 1, 0)\}$

d) Qual è l'insieme delle direzioni di recessione del poliedro?

I $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : -\xi_2 \leq \xi_1 \leq \xi_2\}$ II $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 = 0, \xi_2 \geq 0\}$ III $\emptyset$

e) Scegliere una valore per α in modo tale che $\bar{x} = (2, 1)$ sia l'unica soluzione ottima di (P). Giustificare la risposta.

$\alpha > 1$: l'unica soluzione in scarti complementari con $\bar{x}$ è $y = (0, \alpha - 1, 0, 1)$ che è ammissibile per (D) e non degenere

4) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$
(P) \quad
\begin{array}{lrcrcr}
\max & & & -x_2 & & \\
& -x_1 & & & \leq & 0 \\
& x_1 & & & \leq & 2 \\
& -x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\
& x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
& & - & x_2 & \leq & 0
\end{array}
\qquad
(D) \quad
\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\min & & & 2y_2 & - & y_3 & + & y_4 & + & & & \\
& -y_1 & + & y_2 & - & y_3 & + & y_4 & & & = & 0 \\
& & & & & y_3 & + & y_4 & + & y_5 & = & 1 \\
& y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{2, 3\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A La regione ammissibile di (P) è l'involucro convesso dei punti $(0, 1), (1, 0), (2, 1)$ falso

B $x = (2, 1)$ e $y = (0, -1, 0, 1, 0)$ sono le soluzioni di base individuate alla prima iterazione dell'algoritmo falso

b) Quali sono gli indici entrante k ed uscente h individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $k = 4$, $h = 2$ II $k = 5$, $h = 2$ III $k = 4$, $h = 3$

c) Quali sono la direzione di decrescita d e il passo di spostamento $\bar{\theta}$ individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $d = (0, -2, -1, 1, 0)$, $\bar{\theta} = 1/2$ II $d = (0, 2, 1, 1, 0)$, $\bar{\theta} = 1/2$ III $d = (0, -2, -1, 1, 0)$, $\bar{\theta} = 1$

d) Qual è la soluzione ottima di (D) individuata dall'algoritmo?

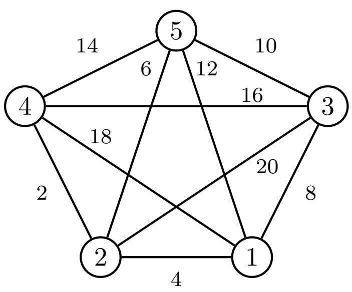
I $\bar{y} = (0, 1, 1, 0, 0)$ II $\bar{y} = (0, 1/2, 1/2, 0, 0)$ III $\bar{y} = (0, 0, 1/2, 1/2, 0)$

e) Modificare al più un termine noto per la regione ammissibile del problema duale (D) in modo tale che il problema primale (P) risulti superiormente illimitato. Giustificare la scelta effettuata.

$\alpha > 1$: se il secondo termine noto è negativo, allora la regione ammissibile di (D) è vuota e quindi (P) superiormente illimitato

esistono altre scelte corrette

5) Si considerino il problema del ciclo hamiltoniano di costo minimo sul seguente grafo



ed il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando l'4-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita per costo crescente degli archi, e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A L'arco $(2, 5)$ appartiene al 4-albero di costo minimo — vero

B Il 4-albero di costo minimo nel sottoproblema in cui $x_{24} = 0$ è un ciclo hamiltoniano — vero

b) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $v_I = 32, v_S = 40$ II $v_I = 34, v_S = 34$ III $v_I = 34, v_S = 38$

c) Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

I 1 per otttimalità ($v_I \geq v_S$) II nessuno III 1 per inammissibilità

d) Su quante e quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I 3: x_{24}, x_{25}, x_{12} II 3: x_{24}, x_{12}, x_{25} III 2: x_{24}, x_{12}

e) Modificare il costo di 1 solo arco in modo tale che l'algoritmo termini alla radice. Giustificare la scelta effettuata.

$c_{24} > 14$: il 4-albero di costo minimo è ammissibile

esistono altre scelte corrette