RICERCA OPERATIVA (a.a. 2021/22)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda *a*) (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande *b*), *c*), *d*) e si risponda alla domanda finale *e*).

1) Il gigante della moda *Bellettoni* ha organizzato la logistica per la distribuzione dei suoi capi d'abbigliamento nel *Ducato degli Chiccosi* attraverso m depositi centrali in affitto e negozi in n centri commerciali. Il rifornimento era stato predisposto in modo da servire ciascun centro da un unico deposito, tenendo conto che ogni deposito j ha capacità mensile pari a C_j capi mentre la domanda mensile di ogni centro i è d_i. A seguito delle restrizioni imposte dal *Duca Vertumno* per arginare la pandemia virale in corso, l'ufficio vendite ha stimato un decremento percentuale h_i della domanda mensile in ciascun centro i. Questa diminuzione rende la capacità complessiva dei depositi eccessivamente ampia per soddisfare la domanda. Per evitare di aumentare i prezzi, l'azienda intende rinunciare ad alcuni depositi e riorganizzare la logistica, mantenendo comunque almeno due terzi dei depositi in previsione di una crescita della domanda nel prossimo futuro. Il deposito j ha un costo di affitto mensile di f_j vertumni d'oro, mentre rifornire il centro i da un deposito diverso comporta un costo c_i per le pratiche amministrative.

Aiuta l'azienda a definire un nuovo piano di distribuzione, formulando in termini di P.L.I. il problema di decidere a quali depositi rinunciare in modo da poter comunque soddisfare interamente la nuova domanda e contemporaneamente massimizzare il risparmio su un orizzonte temporale di M mesi.

Rappresentato il precedente piano di distribuzione attraverso la matrice di dati di coefficienti

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il centro } i \text{ veniva rifornito dal deposito } j \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m,$$

e scelte le famiglie di variabili

$$v_j = \begin{cases} 1, & \text{se l'azienda rinuncia al deposito } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, m,$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il centro } i \text{ viene rifornito dal deposito } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m,$$

$$w_i = \begin{cases} 1, & \text{se adesso il centro } i \text{ viene rifornito da un deposito diverso,} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n,$$

parte della formulazione è data dai vincoli riportati qua sotto:

$$\max$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$v_j,\ x_{ij},\ w_i \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.$$

a) Selezionare tra i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

A $\quad M \sum_{j=1}^{m} f_j v_j - \sum_{i=1}^{n} c_i w_i$ (funzione obiettivo) — aggiungere

B $\quad \sum_{j=1}^{m} \left(M f_j v_j - \sum_{i=1}^{n} c_i x_{ij} \right)$ (funzione obiettivo) — non aggiungere

C $\quad \sum_{i=1}^{n} d_i (1 - 0.01 h_i)\, x_{ij} \le C_j v_j \qquad j = 1, \ldots, m$ — non aggiungere

D $\quad \sum_{i=1}^{n} d_i (1 - 0.01 h_i)\, x_{ij} \le C_j (1 - v_j) \qquad j = 1, \ldots, m$ — aggiungere

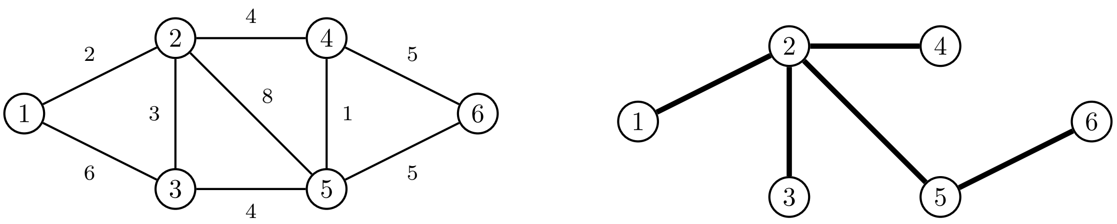
E $\quad \sum_{j=1}^{m} v_j \ge 2m/3$ — non aggiungere

F $\sum_{j=1}^{m} v_j \leq m/3$ aggiungere

G $w_i \geq x_{ij} - a_{ij} \qquad i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, m$ aggiungere

H $w_i \geq (x_{ij} + a_{ij})/2 \qquad i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, m$ non aggiungere

2) Si considerino il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul grafo di sinistra e l'albero riportato a destra:



a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Sostituendo l'arco $(2,4)$ con l'arco $(3,5)$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato falso

B Il costo di un albero di copertura di costo minimo è 22 falso

b) Quali archi non soddisfano la condizione di ottimalità per tagli?

I $(2,5),(5,6)$ II $(2,4),(2,5)$ III $(2,4),(2,5),(5,6)$

c) Quali archi non soddisfano la condizione di ottimalità per cicli?

I $(1,3),(4,5)$ II $(2,4),(4,5)$ III $(3,5),(4,5),(4,6)$

d) Quanti alberi di copertura di costo minimo esistono nel grafo?

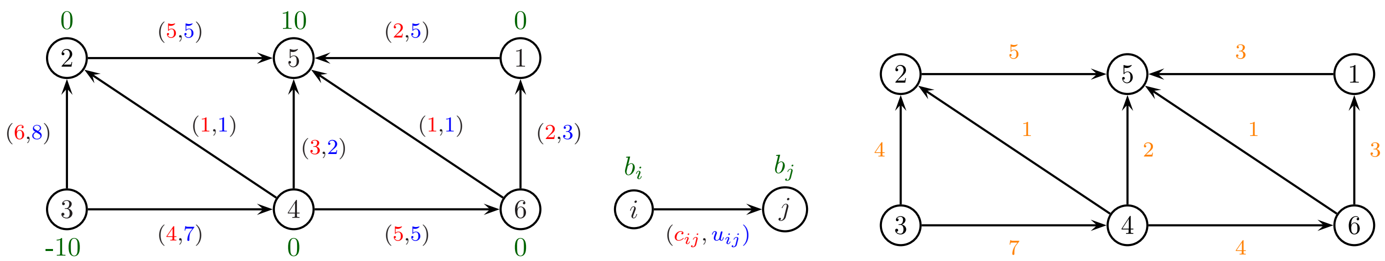
I 1 II 4 III 2

e) Modificare il costo di 2 archi dell'albero a destra in modo tale che sia un albero di copertura di costo minimo. Giustificare la risposta

$c_{24} \leq 1$ e $c_{25} \leq 1$: anche gli archi della domanda b) soddisfano le condizioni di ottimalità per tagli

esistono altre scelte corrette

3) Si considerino il problema di flusso di costo minimo sul grafo di sinistra e lo pseudoflusso x riportato a destra:



a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Il vettore degli sbilanciamenti è $e_x = (0, 0, -1, 0, 1, 0)$ e lo sbilanciamento complessivo è $g(x) = 1$ vero

B $\{3, 2, 5\}$ è un cammino aumentante falso

b) Qual è la capacità del cammino aumentante $\{5, 4, 3\}$?

I 1 | II 2 | III 7

c) Quale dei seguenti è un cammino aumentante di costo minimo?

I $\{5, 2, 3\}$ | II $\{5, 4, 3\}$ | III $\{5, 1, 6, 4, 3\}$

d) Per quali valori del costo dell'arco $(4, 2)$ lo pseudoflusso risulta minimale?

I $c_{42} \leq 0$ | II $c_{42} \geq 2$ | III $c_{42} \leq 2$

e) Modificare la capacità di un solo arco in modo tale che lo pseudoflusso non sia minimale. Giustificare la risposta.

basta aumentare la capacità di $(4, 5)$: nel grafo residuo si crea il ciclo $(4, 5, 2)$ di costo negativo

esistono altre scelte corrette

4) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$(P)\quad \begin{array}{lrcrcr} \max & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ & & & -x_2 & \leq & 2 \\ & 2x_1 & & & \leq & -1 \\ & & & 2x_2 & \leq & 1 \\ & 2x_1 & - & 2x_2 & \leq & 5 \end{array}$$

$$(D)\quad \begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \min & & & 2y_2 & - & y_3 & + & y_4 & + & 5y_5 & & \\ & y_1 & & & + & 2y_3 & & & + & 2y_5 & = & 3 \\ & y_1 & - & y_2 & & & + & 2y_4 & - & 2y_5 & = & 2 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \geq & 0 \end{array}$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{1, 2\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $x = (2, -2)$ e $y = (3, 1, 0, 0, 0)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari — vero

B La soluzione primale di base individuata alla prima iterazione dell'algoritmo è $x = (2, -2)$ — vero

b) Quali sono gli indici entrante k ed uscente h nonché il passo di spostamento $\bar{\theta}$ individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $k = 3,\ h = 2,\ \bar{\theta} = 3/2$ | II $k = 3,\ h = 2,\ \bar{\theta} = 1/2$ | III $k = 5,\ h = 1,\ \bar{\theta} = 1$

c) Qual è la soluzione ottima di (D) individuata dall'algoritmo?

I $\bar{y} = (2, 0, -1/2, 0, 0)$ | II $\bar{y} = (3, 1, 0, 0, 0)$ | III $\bar{y} = (2, 0, 1/2, 0, 0)$

d) Qual è un piano di taglio (di Gomory) che esclude la soluzione ottima $\bar{y}$ trovata alla domanda precedente?

I $y_1 \leq 1$ | II $y_2 \leq 1$ | III $y_2 \geq 1$

e) Scegliere una diversa funzione obiettivo per (P) in modo tale che il problema ammetta infinite soluzioni ottime ma una sola soluzione ottima di base. Giustificare la scelta effettuata.

$c = (0, 1)$ oppure $c = (0, -1)$: la soluzione duale ottima è degenere e l'insieme delle soluzione ottime è $\{(t, 1/2) : t \leq -1/2\}$, $\{(t, -2) : t \leq -1/2\}$ nel secondo

5) Si considerino il problema dello zaino

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \max & 13x_1 & + & 12x_2 & + & 22x_3 & + & 21x_4 & & \\ & 7x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 4x_4 & \leq & 8 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 \in \{0, 1\} & & \end{array}$$

ed il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo *greedy* basato sui rendimenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita in ordine decrescente di rendimento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazione sono corrette?

A L'ordinamento delle variabili per rendimento decrescente è x_4, x_3, x_2, x_1 vero

B La soluzione ottima del rilassamento continuo del problema è $(0, 1, 1, 0)$ falso

b) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $v_I = 34, v_S = 38$ II $v_I = 33, v_S = 38$ III $v_I = 34, v_S = 34$

c) Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

I 1 per ammissibilità II nessuno III 1 per $v_S < v_I$

d) Su quante e quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I 2: x_4, x_3 II 3: x_4, x_3, x_2 III 1: x_4

e) Modificare la capacità dello zaino in modo tale che l'algoritmo termini direttamente alla radice con l'inserimento di 3 oggetti. Giustificare la scelta effettuata.

$b = 12$: la soluzione del rilassamento continuo $x = (0, 1, 1, 1)$ del problema risulta essere ammissibile

esistono altre scelte corrette