RICERCA OPERATIVA (a.a. 2021/21)

Per ciascun esercizio si individuino l'eventuale correttezza delle affermazioni $a)$, l'unica risposta corretta alle domande $b), c), d), e)$ e si risponda alle domande finali $f)$.

1) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare ed il suo problema duale (D):

$$(P)\quad \begin{array}{lrcrcl} \max & \alpha x_1 & + & \beta x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & & & -x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

a) La seguente affermazione è corretta?

A $x = (2,1)$ e $y = ((\alpha-\beta)/2, 0, 0, (\alpha+\beta)/2, 0)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari — vero

b) Per quale famiglia di coppie di valori la soluzione $x = (2,1)$ è ottima per (P)?

I $\alpha = -\beta,\ \beta > 0$ — II $\alpha \geq \beta$ — III $\alpha \geq |\beta|$

c) Per quale coppia di valori la soluzione $x = (1,2)$ è ottima per (P)?

I nessuna — II $\alpha = 1,\ \beta = 1$ — III $\alpha = 1,\ \beta = -1$

d) Se $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (P)?

I $\{(0,3)\}$ — II $\{(t, 3-t)\ :\ 0 \leq t \leq 2\}$ — III $\{(2,1)\}$

e) Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (D)?

I $\{(-1/2, 0, 0, 1/2, 0)\}$ — II $\{(1/2, 0, 0, 1/2, 0)\}$ — III $\{(0, 0, 1/2, 1/2, 0)\}$

f) A Si scelgano valori per α e β tali che $\bar{y} = (1,0,0,0,0)$ sia una soluzione ottima per (D). Giustificare la scelta effettuata.

$\bar{y}$ è ammissibile se e solo se $\alpha = 1$ e $\beta = -1$: in questo caso risulta anche ottima in quanto soddisfa la condizione degli scarti complementari con la soluzione primale ammissibile $x = (2,1)$

B Eliminare un solo vincolo di (P) in modo tale che il problema risulti superiormente illimitato per $\alpha = \beta = 1$. Giustificare la scelta effettuata.

eliminando il quarto vincolo, c diventa una direzione di recessione della regione ammissibile

2) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$(P)\quad \begin{array}{lrcrcl} \max & 2x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & & & 2x_2 & \leq & 7 \\ & -2x_1 & + & 2x_2 & \leq & 7 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & & & -x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

$$(D)\quad \begin{array}{lrcrcrcrcrcl} \min & 2y_1 & + & 7y_2 & + & 7y_3 & & & & & & \\ & y_1 & & & - & 2y_3 & - & y_4 & & & = & 2 \\ & -y_1 & + & 2y_2 & + & 2y_3 & & & - & y_5 & = & 1 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \geq & 0 \end{array}$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{2,3\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A La regione ammissibile di (P) è l'involucro convesso di $(0,0), (2,0), (0,3), (5,3)$ falso

B La direzione $\xi = (1,-1)$ è ammissibile per $x = (0,3)$ vero

b) Quali sono le soluzioni di base individuate alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $\bar{x} = (0, 7/2)$, $\bar{y} = (0, 3/2, -1, 0, 0)$ II $\bar{x} = (0, 7/2)$, $\bar{y} = (0, 3/2, 1, 0, 0)$ III $\bar{x} = (0, 3/2)$, $\bar{y} = (3/2, -1, 0, 0)$

c) Quali sono la direzione di crescita ξ e il passo di spostamento $\bar{\lambda}$ individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $\xi = (1/2, 0)$, $\bar{\lambda} = 0$ II $\xi = (1, -1)$, $\bar{\lambda} = +\infty$ III $\xi = (1/2, 0)$, $\bar{\lambda} = 11$

d) Quali sono le soluzioni ottime individuate dall'algoritmo?

I $\bar{x} = (0, 7/2)$, $\bar{y} = (-2, 3/2, 0, 0, 0)$ II $\bar{x} = (11/2, 7/2)$, $\bar{y} = (0, 0, 0, 2, 3/2)$ III $\bar{x} = (11/2, 7/2)$, $\bar{y} = (2, 3/2, 0, 0, 0)$

e) Qual è un piano di taglio (di Gomory) che esclude la soluzione ottima $\bar{y}$ trovata alla domanda precedente?

I $y_4 + y_5 \leq 1$ II $y_4 + y_5 \geq 1$ III $y_1 + y_2 \geq 1$

f) Scegliere una diversa funzione obiettivo per (P) in modo tale che la soluzione ottima $\bar{x}$ individuata alla domanda d) resti ottima ma non sia l'unica soluzione ottima del problema. Giustificare la scelta effettuata.

$c = (1, -1)$ oppure $c = (0, 1)$: in entrambi i casi la soluzione duale ottima di base è degenere; nel primo il segmento di estremi $\bar{x}$ e $(2, 0)$ è costituito da soluzioni ottime, nel secondo il segmento di estremi $\bar{x}$ e $(0, 7/2)$

3) Si considerino il problema dello zaino

$$
\begin{array}{rcccccccl}
\max & 16x_1 & + & 21x_2 & + & 23x_3 & + & 19x_4 & \\
 & 6x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & \leq 8 \\
 & \multicolumn{8}{c}{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \in \{0,1\}}
\end{array}
$$

ed il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo *greedy* basato sui rendimenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) La seguente affermazione è corretta?

A La soluzione ottima del rilassamento continuo del problema è $(0, 1, 1, 1)$ falso

b) Qual è l'ordinamento delle variabili per rendimento decrescente?

I x_1, x_3, x_2, x_4 II x_2, x_4, x_3, x_1 III x_4, x_2, x_3, x_1

c) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $v_I = 42, v_S = 44$ II $v_I = 40, v_S = 44$ III $v_I = 40, v_S = 42$

d) Su quante e quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I 2: x_4, x_3 II 3: x_3, x_1, x_2 III 1: x_3

e) Qual è la soluzione ottima del problema?

$\boxed{\text{I}}$ $(0, 1, 1, 1)$ $\boxed{\text{II}}$ $(0, 0, 1, 1)$ $\boxed{\text{III}}$ $(0, 1, 0, 1)$

f) Modificare il peso di un solo oggetto in modo tale che l'algoritmo termini direttamente alla radice. Giustificare la scelta effettuata.

$a_2 \geq 5$: nell'ordinamento per rendimenti decrescenti le prime variabili risultano x_4 e x_3, quindi l'algoritmo greedy individua subito la soluzione ottima $(0, 0, 1, 1)$

esistono altre scelte corrette