## RICERCA OPERATIVA (a.a. 2020/21)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda *a*) (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande *b*), *c*), *d*) e si risponda alla domanda finale *e*).

**1)** Per agevolare la transizione ecologica gli $n$ Dipartimenti Ambientali della *Confederazione delle Repubbliche Cingolane* intendono finanziare le $m$ aziende energetiche che operano nella confederazione affinché producano energia rinnovabile. Il dipartimento $i$ può investire fino a $c_i$ milioni di cingoli d'argento, mentre l'azienda $j$ ne necessita di almeno $\ell_j$ per avviare la produzione e può garantire $e_j$ megawattora di energia rinnovabile all'anno per ciascun milione di cingoli eccedente $\ell_j$ fino ad un massimo di $E_j$ megawattora. Per ragioni di equità il Governo Confederale richiede che il finanziamento complessivo ad una singola azienda non sia superiore ad una volta e mezzo quello concesso a ciascun altra azienda.

Aiuta il *Ministro Confederale Cingolano* a definire un piano di finanziamento, formulando in termini di P.L.I. il problema di decidere l'entità del finanziamento dei dipartimenti alle aziende in modo da massimizzare la produzione annuale di energia rinnovabile nel rispetto della disponibilità finanziaria, dei vincoli di produzione e di equità.

Scelte le famiglie di variabili

$x_{ij} =$ milioni di cingoli d'argento di finanziamento del dipartimento $i$ all'azienda $j$,

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se l'azienda } j \text{ ottiene il finanziamento minimo per avviare la produzione,} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m$$

$s_j =$ megawattora di energia rinnovabile prodotti annualmente dall'azienda $j$,

parte della formulazione è data dai vincoli e dalla funzione obiettivo riportati qua sotto:

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{m} s_j & \\ & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le c_i & i = 1,\dots,n \\ & s_j \le E_j y_j & j = 1,\dots,m, \\ & x_{ij} \ge 0,\ s_j \ge 0 & i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m, \\ & y_j \in \{0,1\} & j = 1,\dots,m. \end{array}$$

a) Selezionare tra i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

A $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \ge \ell_j \qquad j = 1,\dots,m$ — non aggiungere

B $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \ge \ell_j y_j \qquad j = 1,\dots,m$ — aggiungere

C $s_j \le e_j(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - \ell_j y_j) \qquad j = 1,\dots,m$ — aggiungere

D $s_j \le e_j(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - \ell_j) \qquad j = 1,\dots,m$ — non aggiungere

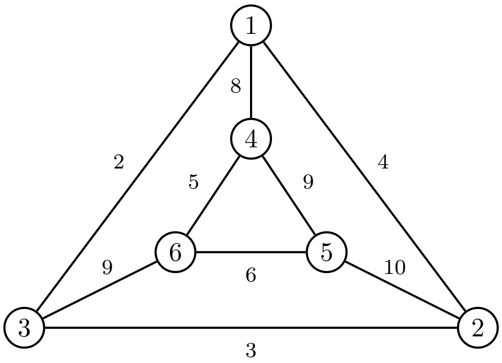
E $s_j \ge e_j(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - \ell_j y_j) \qquad j = 1,\dots,m$ — non aggiungere

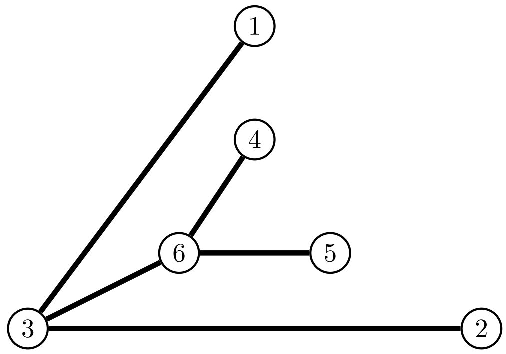
F $2\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \ge 3\sum_{i=1}^{n} x_{ik} \qquad j = 1,\dots,m,\ k = 1,\dots,m,\ k \ne j$ — non aggiungere

G $2x_{ij} \geq 3x_{ik} \qquad i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m,\ k = 1, \dots, \ell,\ k \neq j$ non aggiungere

H $2 \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 3 \sum_{i=1}^{n} x_{ik} \qquad j = 1, \dots, m,\ k = 1, \dots, m,\ k \neq j$ aggiungere

**2)** Si considerino il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul grafo di sinistra e l'albero riportato a destra:




a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Sostituendo l'arco $(3, 6)$ con l'arco $(4, 5)$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato falso

B Nel grafo non esistono altri alberi di copertura che hanno lo stesso costo di quello dato falso

b) Quali archi non soddisfano la condizione di ottimalità per cicli?

I $(1, 2), (1, 4)$ II $(2, 5), (4, 5)$ III $(1, 4)$

c) Quali archi non soddisfano la condizione di ottimalità per tagli?

I $(1, 3), (4, 6)$ II $(5, 6)$ III $(3, 6)$

d) Qual è il costo di un albero di copertura di costo minimo?

I 20 II 24 III 25

e) Modificare il costo di un solo arco. Quale arco e costo scegliere affinché l'albero a destra sia un albero di costo minimo?

arco $(3, 6)$ con costo $c_{36} \leq 8$ oppure arco $(1, 4)$ con costo $c_{14} \geq 9$

**3)** Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare ed il suo problema duale $(D)$:

$$
(P) \quad \begin{array}{rrcrcl}
\max & & - & x_2 & & \\
& -x_1 & & & \leq & 0 \\
& & - & x_2 & \leq & 0 \\
& -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
& x_1 & - & x_2 & \leq & \alpha
\end{array}
$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Se $\alpha < -1$, allora $(P)$ è vuoto vero

B $\bar{x} = (\alpha, 0)$ e $\bar{y} = (0, 1, 0, 0)$ non soddisfano la condizione degli scarti complementari falso

b) Se $\alpha = 1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di $(P)$?

I $\{(0,1)\}$ II $\{(0,t) : 0 \le t \le 1\}$ III $\{(0,0)\}$

c) Se $\alpha = 0$, l'insieme di tutte le soluzioni ottime di $(D)$?

I $\{(t, 1-t, 0, t) : 0 \le t \le 1\}$ II $\emptyset$ III $\{(0,1,1,1)\}$

d) Se $\alpha \ge -1$, qual è l'insieme delle direzioni di recessione del poliedro?

I $\emptyset$ II $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 = \xi_2 \ge 0\}$ III $\{(0,0)\}$

e) Scegliere $\alpha$ in modo tale che $x = (0,1)$ sia una soluzione ottima di $(P)$. Giustificare la risposta.

$\alpha = -1$: il poliedro si riduce alla semiretta $\{(t, t+1) : t \ge 0\}$

**4)** Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$(P)\quad \begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & - & 2x_2 & & \\ & -x_1 & & & \le & 0 \\ & & - & x_2 & \le & 0 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \le & 1 \\ & x_1 & - & x_2 & \le & 2 \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{lrrrrrrrcr} \min & & & & & y_3 & + & 2y_4 & & \\ & -y_1 & & & - & 2y_3 & + & y_4 & = & 1 \\ & & - & y_2 & + & y_3 & - & y_4 & = & -2 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \ge & 0 \end{array}$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{1,3\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $x = (1,0)$ è una soluzione primale di base ammissibile falso

B $\xi = (1,2)$ è una direzione di crescita per $(P)$ falso

b) Quali sono le soluzioni di base individuate alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $\bar{x} = (0,1)$, $\bar{y} = (3,-2,0,0)$ II $\bar{x} = (0,1)$, $\bar{y} = (3,0,-2,0)$ III $\bar{x} = (1,0)$, $\bar{y} = (3,0,-2,0)$

c) Quali sono la direzione di crescita $\xi$ e il passo di spostamento $\bar{\lambda}$ individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $\xi = (0,-1)$, $\bar{\lambda} = 1$ II $\xi = (1,2)$, $\bar{\lambda} = +\infty$ III $\xi = (0,-1)$, $\bar{\lambda} = 0$

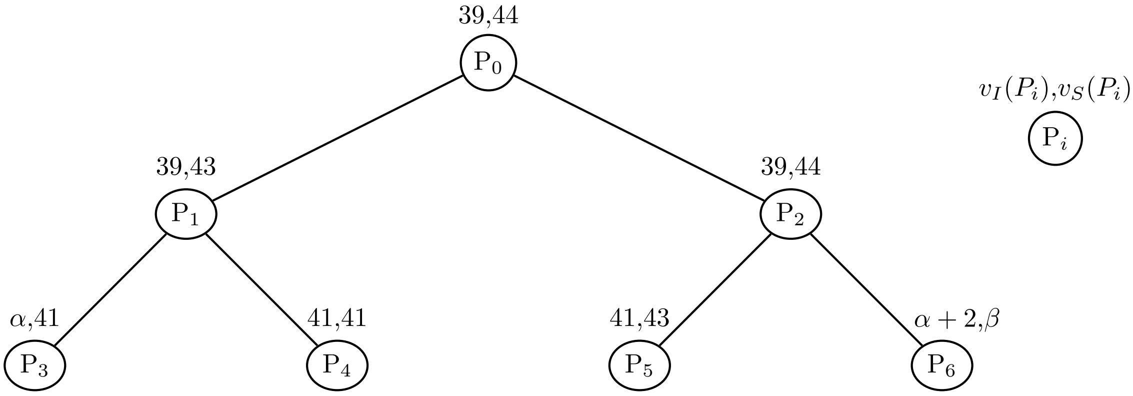
d) Quali sono le soluzioni ottime individuate dall'algoritmo?

I $\bar{x} = (2,0)$, $\bar{y} = (1,0,0,2)$ II $\bar{x} = (2,0)$, $\bar{y} = (0,1,0,1)$ III $\bar{x} = (1,0)$, $\bar{y} = (0,1,0,0)$

e) Scegliere una funzione obiettivo per il problema primale $(P)$ in modo tale che $x = (1,0)$ sia una soluzione ottima. Giustificare la scelta effettuata.

$c = (0,-1)$: $x$ soddisfa la condizione degli scarti complementari con la soluzione duale ammissibile $y = (0,1,0,0)$

**5)** Si consideri un problema di Programmazione Lineare Intera con variabili binarie $x_j \in \{0,1\}$. In figura è riportata la porzione dell'albero di enumerazione totale ottenuta tramite l'esecuzione di alcune iterazioni di un metodo "Branch and Bound" opportuno: i nodi sono stati visitati in ordine crescente dell'indice del sottoproblema $P_i$ e sul nodo sono riportate le corrispondenti valutazioni inferiore $v_I(P_i)$ e superiore $v_S(P_i)$.




a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Si tratta di un problema di massimizzazione — vero

B $\alpha$ deve necessariamente soddisfare la disuguaglianza $\alpha \geq 39$ — vero

b) Quale valore $\beta$ non può assumere?

I $\beta = \alpha + 1$ II $\beta = 45$ III $\beta = 41$

c) Quale disuguaglianza è sempre verificata?

I $\alpha < 42$ II $\beta < 42$ III $\alpha < \beta$

d) Se $\alpha = 39$ e $\beta = 41$, qual è l'insieme di tutti i nodi che possono venir chiusi?

I $\{P_4, P_6\}$ II $\{P_3, P_5\}$ III $\{P_3, P_4, P_6\}$

e) Si scelgano valori per $\alpha$ e $\beta$ che garantiscano la chiusura di tutti i nodi ancora aperti. Giustificare la scelta effettuata.

$\alpha = 41$ e $\beta = 43$: la soluzione ottima del rilassamento di $P_6$ è ammissibile e ha valore maggiore od uguale a $v_S(P_3), v_S(P_4)$ e $v_S(P_5)$