RICERCA OPERATIVA (a.a. 2020/21)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda *a*) (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande *b*), *c*), *d*) e si risponda alla domanda finale *e*).

1) Il gigante alimentare *Buitillia* ha organizzato la logistica per la distribuzione della sua raffinata pasta nel *Principato dei Pantagruelici* attraverso m depositi centrali di sua proprietà e n centri periferici di distribuzione. Il rifornimento era stato predisposto in modo da servire ciascun centro da un unico deposito, tenendo conto che ogni deposito j ha capacità mensile pari a C_j chilogrammi di pasta mentre la domanda mensile di ogni centro i è d_i. A seguito delle restrizioni imposte dal *Principe Lucullo* per arginare la pandemia virale in corso, l'ufficio vendite ha stimato un incremento percentuale h_i della domanda mensile in ciascun centro i. Questo aumento rende la capacità complessiva dei depositi insufficiente a soddisfare la nuova domanda. Per far fronte a questa situazione, l'azienda ha messo a disposizione un budget mensile di M luculli d'argento per affittare ulteriori depositi centrali tra ℓ disponibili sul territorio. Il deposito k ha un costo di affitto mensile f_k ed una capacità B_k.

Aiuta l'azienda a definire un nuovo piano di distribuzione, formulando in termini di P.L.I. il problema di decidere quali depositi aggiuntivi affittare in modo da poter soddisfare interamente la nuova domanda e contemporaneamente minimizzare il numero di centri che verranno riforniti da un deposito diverso da quello utilizzato in precedenza.

Rappresentato il precedente piano di distribuzione attraverso la matrice di dati di coefficienti

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il centro } i \text{ veniva rifornito dal deposito } j \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, m,$$

e scelte le famiglie di variabili

$$y_k = \begin{cases} 1, & \text{se il deposito } k \text{ viene affittato,} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad k = 1, \dots, \ell,$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il centro } i \text{ viene rifornito dal deposito di proprietà } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, m,$$

$$z_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{se il centro } i \text{ viene rifornito dal deposito in affitto } k, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n, \; k = 1, \dots, \ell,$$

$$w_i = \begin{cases} 1, & \text{se adesso il centro } i \text{ viene rifornito da un deposito diverso,} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n,$$

parte della formulazione è data dai vincoli e dalla funzione obiettivo riportati qua sotto:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n} w_i \\ & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} + \sum_{k=1}^{\ell} z_{ik} = 1 \qquad i = 1, \dots, n \\ & \sum_{k=1}^{\ell} f_k y_k \le M \\ & y_k,\, x_{ij},\, z_{ik},\, w_i \in \{0,1\} \qquad k = 1, \dots, \ell,\; i = 1, \dots, n,\; j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

a) Selezionare tra i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

A $\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i(1 + 0.01 h_i)\, x_{ij} \le C_j \qquad j = 1, \dots, m$ — aggiungere

B $\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i(1 + 0.01 h_i)\, z_{ik} \le B_k \sum_{i=1}^{n} w_i \qquad k = 1, \dots, \ell$ — non aggiungere

C $\sum_{i=1}^{n} d_i(1+0.01h_i)\, x_{ij} \le C_j \sum_{i=1}^{n} w_i \qquad j=1,\dots,m$ — non aggiungere

D $\sum_{i=1}^{n} d_i(1+0.01h_i)\, z_{ik} \le B_k y_k \qquad k=1,\dots,\ell$ — aggiungere

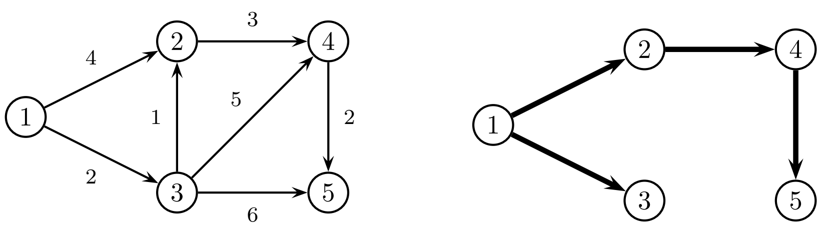
E $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le w_i \qquad i=1,\dots,n$ — non aggiungere

F $\sum_{k=1}^{\ell} z_{ik} \le w_i \qquad i=1,\dots,n$ — aggiungere

G $z_{ik} \ge w_i \qquad i=1,\dots,n,\ k=1,\dots,\ell$ — non aggiungere

H $x_{ij} \le a_{ij} + w_i \qquad i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m$ — aggiungere

2) Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo di sinistra:



a) Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

A $d = (0, 4, 2, 6, 9)$ è il vettore delle etichette relative all'albero — falso

B Il costo dell'albero è 21 — vero

b) Quale coppia di archi non soddisfano le corrispondenti condizioni di Bellman?

I $(3,2), (3,5)$ II $(3,2), (3,4)$ III $(3,4), (3,5)$

c) Quali archi bisogna sostituire nell'albero con quelli scelti al punto b) per ottenere un albero dei cammini minimi?

I $(1,2), (4,5)$ II $(1,3), (4,5)$ III $(1,2), (2,4)$

d) Quale costo bisogna assegnare a $(1,2)$ affinché l'albero a destra sia un albero dei cammini minimi?

I 4 II 5 III 3

e) Modificare il costo del minor numero possibile di archi affinché esistano esattamente 4 distinti alberi dei cammini minimi. Giustificare la risposta

$c_{12} = 3$: $(1,2)$ e $(4,5)$ soddisfano le condizioni di Bellman come uguaglianza

3) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare ed il suo problema duale (D):

$$(P)\quad \begin{array}{lrcrcr} \max & \alpha x_1 & + & \alpha x_2 & & \\ & x_1 & & & \le & 0 \\ & & & x_2 & \le & 0 \\ & -x_1 & + & x_2 & \le & 1 \\ & -x_1 & & & \le & 2 \end{array}$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Se $\alpha \geq 0$, allora (P) è superiormente illimitato falso

B $\bar{x} = (0, 0)$ e $\bar{y} = (1, \alpha, 0, 0)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari vero

b) Se $\alpha = 1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (P)?

I $\{(-1, 0)\}$ II $\{(-t, 0) : 0 \leq t \leq 1\}$ III $\{(0, 0)\}$

c) Se $\alpha = -1$, qual è il valore ottimo di (D)?

I $-\infty$ II $+\infty$ III 0

d) Qual è l'insieme delle direzioni di recessione del poliedro?

I $\emptyset$ II $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 = 0,\ \xi_2 \leq 0\}$ III $\{(0, 0)\}$

e) Scegliere α in modo tale che $x = (0, -1)$ sia una soluzione ottima di (P). Giustificare la risposta.

$\alpha = 0$: x e la soluzione duale ammissibile $y = (1, 0, 0, 0)$ soddisfano gli scarti complementari

4) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$(P) \quad \begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & + & 3x_2 & & \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ & 4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & & & \leq & 3 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \min & y_1 & & & + & 2y_3 & + & 3y_4 & + & 2y_5 & & \\ & -y_1 & + & 2y_2 & + & 4y_3 & + & y_4 & & & = & 1 \\ & y_1 & + & y_2 & + & 5y_3 & & & + & y_5 & = & 3 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \geq & 0 \end{array}$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{4, 5\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $x = (3, 2)$ e $y = (0, 0, 0, 1, 3)$ sono le soluzioni di base individuate alla prima iterazione dell'algoritmo vero

B $\xi = (1, -2)$ è una direzione ammissibile per $x = (0, 0)$ e di crescita per (P) falso

b) Quali sono la direzione di decrescita d e il passo di spostamento $\bar{\theta}$ individuati alla seconda iterazione dell'algoritmo?

I $d = (0, 1, 0, -2, -1)$, $\bar{\theta} = 1/2$ II $d = (1, -1/2, 0, 0, 3/2)$, $\bar{\theta} = 1$ III $d = (1, 1/2, 0, 0, -3/2)$, $\bar{\theta} = 5/3$

c) Qual è la soluzione ottima di (D) individuata dall'algoritmo?

I $\bar{y} = (5/3, 4/3, 0, 0, 0)$ II $\bar{y} = (0, 1/2, 0, 0, 5/2)$ III $\bar{y} = (0, 0, 0, 1, 3)$

d) Qual è un piano di taglio (di Gomory) che esclude la soluzione ottima $\bar{y}$ trovata al punto precedente?

I $y_1 + y_2 \geq 4$ II $y_4 + y_5 \leq 1$ III $y_4 + y_5 \geq 1$

e) Modificare al più un termine noto per la regione ammissibile del problema duale (D) in modo tale che il problema primale (P) risulti superiormente illimitato. Giustificare la scelta effettuata.

se $b_2 < 0$, allora la regione ammissibile di (D) è vuota e quindi (P) risulta superiormente illimitato

esistono altre scelte corrette

5) Si considerino il problema dello zaino

$$
\begin{array}{lcccccccc}
\max & 10x_1 & + & 4x_2 & + & 11x_3 & + & 9x_4 & \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq 9 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \in \{0,1\} & & & &
\end{array}
$$

ed il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo *greedy* basato sui rendimenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Nel sottoproblema in cui $x_4 = 0$ la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(1,1,1,0)$ vero

B La soluzione ammissibile di partenza dell'algoritmo è $(1,1,1,0)$ vero

b) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $v_I = 25, v_S = 30$ II $v_I = 25, v_S = 31$ III $v_I = 26, v_S = 25$

c) Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

I 1 per ammissibilità II nessuno III 1 per $v_S < v_I$

d) Su quante e quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I 2: x_4, x_3 II 2: x_4, x_1 III 3: x_4, x_3, x_2

e) Modificare il beneficio di un solo oggetto in modo tale che l'algoritmo termini dopo la prima ramificazione. Giustificare la scelta effettuata.

$c_4 = 4$: alla radice e nel sottoproblema con $x_4 = 0$ non ci sono variazioni significative mentre il sottoproblema con $x_4 = 1$ fornisce $v_S = 25 = v_I$

esistono altre scelte corrette