RICERCA OPERATIVA (a.a. 2020/21)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda a) (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande b), c), d) e si risponda alla domanda finale e).

1) Per rigenerare l'economia dissestata da anni di terribili eruzioni vulcaniche, il consiglio degli anziani saggi del *Regno dei Dragoni* ha individuato m progetti da realizzare, che sono già stati catalogati in n aree tematiche di interesse. Ciascun progetto j costa c_j lapilluli d'oro e ne porterebbe r_j come ritorno atteso. La *Confederazione delle Terre Demoniache* intende mettere a disposizione del regno M lapilluli di finanziamento a precise condizioni: in ciascuna area i devono venire attivati almeno ℓ_i progetti e lo scostamento percentuale della spesa totale dal valore di riferimento T_i non deve superare la soglia h_i; inoltre, la spesa per una singola area tematica non può superare il doppio di quella per ciascuna delle altre.

Aiuta il *Dragone Pianificatore* a predisporre il piano di spesa da proporre alla confederazione, formulando in termini di P.L.I. il problema di stabilire quali progetti selezionare nel rispetto del finanziamento assegnato e di tutti i vincoli richiesti con l'obiettivo di massimizzare il ritorno atteso complessivo dei progetti selezionati.

Scelta la famiglia di variabili

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{se il progetto } j \text{ viene selezionato} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad j = 1, \dots, m$$

ed indicato con $S(i)$ l'insieme di tutti i possibili progetti relativi all'area i, parte della formulazione è data dai vincoli e dalla funzione obiettivo riportati qua sotto:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{m} r_j x_j \\ & \sum_{j \in S(i)} c_j x_j - T_i \le T_i h_i && i = 1, \dots, n \\ & x_j \in \{0, 1\} && j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

a) Selezionare tra i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

A $\sum_{j=1}^{m} c_j x_j \le M$ — aggiungere

B $\sum_{j=1}^{m} c_j x_j = M$ — non aggiungere

C $\sum_{j \in S(i)} c_j x_j \ge \ell_i \quad i = 1, \dots, m$ — non aggiungere

D $\sum_{j \in S(i)} x_j \ge \ell_i \quad i = 1, \dots, m$ — aggiungere

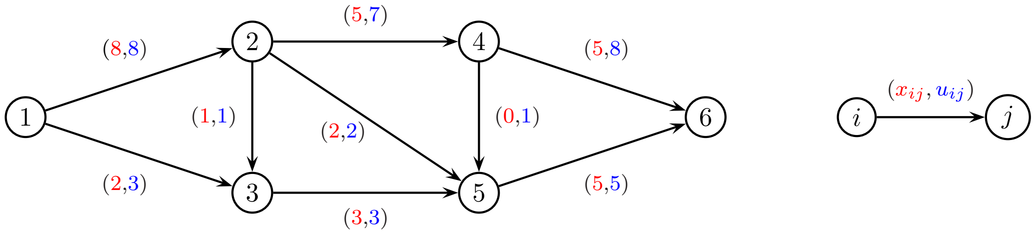
E $T_i - \sum_{j \in S(i)} c_j x_j \le T_i h_i \quad i = 1, \dots, n$ — aggiungere

F $\sum_{j \in S(h)} c_j x_j \le 2 \sum_{j \in S(k)} c_j x_j \quad h = 1, \dots, n,\ k = 1, \dots, n,\ k \ne h$ — aggiungere

G $\sum_{j \in S(h)} c_j x_j \le 2 \sum_{j \in S(k)} c_j x_j \quad h = 1, \dots, n-1,\ k = h+1, \dots, n$ — non aggiungere

H $\sum_{j \in S(h)} c_j x_j \ge 2 \sum_{j \in S(k)} c_j x_j \quad h = 1, \dots, n,\ k = 1, \dots, n,\ k \ne h$ — non aggiungere

2) Si consideri il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sul grafo seguente:



a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Il valore del flusso riportato in figura nel taglio $(\{1,3,5\},\{2,4,6\})$ è 13. falso

B La capacità del taglio $(\{1,3\},\{2,4,5,6\})$ è 11. vero

b) Quale dei seguenti è un cammino aumentante

I $\{1,3,5,2\}$ II $\{1,3,2,5,4,6\}$ III $\{1,3,2,4,6\}$

c) Qual è un taglio di capacità minima?

I $(\{1,2,3,5\},\{4,6\})$ II $(\{1\},\{2,3,4,5,6\})$ III $(\{1,2,3\},\{4,5,6\})$

d) Diminuendo la capacità dell'arco $(5,6)$ a $u_{56} = 4$, di quanto diminuisce il valore del flusso massimo?

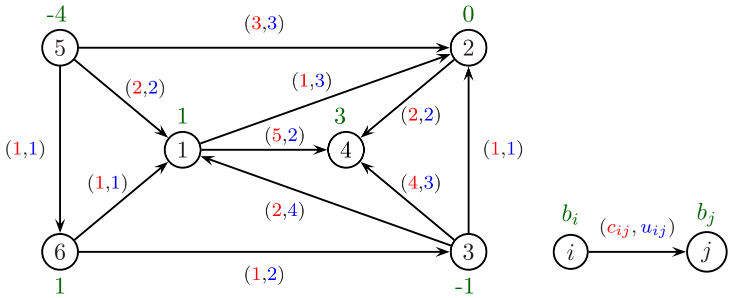
I 3 II 1 III 0

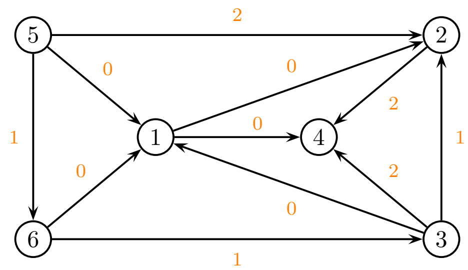
e) Quali capacità è sufficiente modificare (e come) affinché il flusso in figura sia massimo? Giustificare la risposta.

$u_{13} = 2$: la capacità del taglio $(\{1\},\{2,3,4,5,6\})$ diventa 10 risultando uguale al valore del flusso

esistono altre scelte corrette

3) Si considerino il problema di flusso di costo minimo sul grafo di sinistra e lo pseudoflusso x riportato a destra:





a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Il vettore degli sbilanciamenti è $e_x = (-1,1,-1,1,1,-1)$ con sbilanciamento complessivo $g(x) = 4$ falso

B Lo pseudoflusso è minimale vero

b) Per quali valori del costo dell'arco $(3,2)$ lo pseudoflusso risulta minimale?

I $c_{32} \geq 1$ II $c_{32} \leq 1$ III nessuno

c) Qual è la massima quantità di flusso che si può inviare lungo il cammino aumentante $\{4,3,1\}$?

I $\theta = 1$ II $\theta = 0$ III $\theta = 3$

d) Quale dei seguenti è un cammino aumentante di costo minimo?

I $\{1, 4, 2, 5\}$ II $\{4, 3, 1\}$ III $\{4, 3, 6, 5, 1\}$

e) Come bisogna modificare il bilancio dei nodi e/o il costo degli archi in modo che lo pseudoflusso diventi un flusso ammissibile di costo minimo? Giustificare la risposta.

$b = (0, 1, -2, 4, -3, 0)$ garantisce l'ammissibilità e la minimalità è preservata (non dipende da b)

4) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$(P)\quad \begin{array}{rrcrcl} \max & -x_1 & - & 2x_2 & & \\ & x_1 & & & \le & 0 \\ & & & -x_2 & \le & 0 \\ & x_1 & + & x_2 & \le & 1 \\ & -x_1 & - & x_2 & \le & 1 \\ & x_1 & - & x_2 & \le & 0 \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{lrrrrrcr} \min & & & y_3 & + y_4 & & & \\ & y_1 & & + y_3 & - y_4 & + y_5 & = & -1 \\ & & -y_2 & + y_3 & - y_4 & - y_5 & = & -2 \\ & y_1, & y_2, & y_3, & y_4, & y_5 & \ge & 0 \end{array}$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{1, 3\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $x = (0, 0)$ è una soluzione primale di base ammissibile — vero

B $\xi = (-1, 1)$ è una direzione di crescita per (P) — vero

b) Quali sono le soluzioni di base individuate alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $\bar{x} = (0, 1)$, $\bar{y} = (1, 0, -2, 0, 0)$ II $\bar{x} = (0, 0)$, $\bar{y} = (-1, 0, 2, 0, 0)$ III $\bar{x} = (0, 1)$, $\bar{y} = (-1, 0, 2, 0, 0)$

c) Quali sono la direzione di crescita ξ e il passo di spostamento $\bar{\lambda}$ individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $\xi = (-1, 1)$, $\bar{\lambda} = 1$ II $\xi = (0, -1)$, $\bar{\lambda} = 1$ III $\xi = (0, -1)$, $\bar{\lambda} = 2$

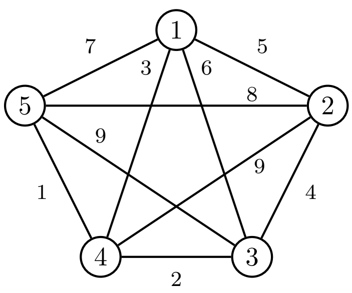
d) Quali sono le soluzioni ottime individuate dall'algoritmo?

I $\bar{x} = (0, 0)$, $\bar{y} = (-1, 0, 2, 0, 0)$ II $\bar{x} = (-1, 0)$, $\bar{y} = (0, 1, 0, 1, 0)$ III $\bar{x} = (-1, 0)$, $\bar{y} = (0, 1, 1, 2, 0)$

e) Scegliere una funzione obiettivo per il problema primale (P) in modo tale che il problema risulti superiormente illimitato. Giustificare la scelta effettuata.

$c = (-1, 1)$: c è una direzione di recessione della regione ammissibile di (P) — esistono altre scelte corrette

5) Si considerino il problema del ciclo hamiltoniano di costo minimo sul seguente grafo



ed il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 5, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando l'5-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita per costo crescente degli archi, e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A L'arco $(1, 4)$ appartiene al 5-albero di costo minimo vero

B Il 5-albero di costo minimo nel sottoproblema in cui $x_{45} = 0$ è un ciclo hamiltoniano vero

b) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $v_I = 16, v_S = 20$ II $v_I = 17, v_S = 17$ III $v_I = 17, v_S = 19$

c) Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

I 1 per otttimalità ($v_I \geq v_S$) II nessuno III 1 per inammissibilità

d) Su quante e quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I 3: x_{45}, x_{14}, x_{34} II 3: x_{45}, x_{34}, x_{14} III 2: x_{45}, x_{34}

e) Modificare il costo di 1 solo arco in modo tale che l'algoritmo termini alla radice. Giustificare la scelta effettuata.

$c_{14} = 6$: la soluzione ammissibile di partenza coincide con il 5-albero di costo minimo

esistono altre scelte corrette