RICERCA OPERATIVA (a.a. 2020/21)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda *a*) (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande *b*), *c*), *d*) e si risponda alla domanda finale *e*).

1) Il colosso farmaceutico *BluePills* può finalmente immettere sul mercato il vaccino che permetterà di arrestare la pandemia in corso. Ogni dose consente di vaccinare una sola persona. La *Repubblica Esperia* sta predisponendo un piano di vaccinazione articolato su 26 settimane per le sue 21 regioni e ha stanziato un fondo ad-hoc di D dramme. La casa farmaceutica garantirà la fornitura del vaccino per tutte le settimane del piano, più precisamente potrà fornire fino a V_h dosi con costo c_h dramme ciascuna per la settimana h. La Repubblica dispone di un unico deposito centrale di stoccaggio dove arriveranno le forniture settimanali. Il deposito può contenere contemporaneamente al più S dosi, mentre il costo di trasporto di una dose dal deposito alla regione i è t_i dramme. La regione i conta a_i abitanti, di cui b_i già immunizzati per aver contratto la malattia in precedenza. Per arginare uniformemente la pandemia, le autorità sanitarie hanno raccomandato che la massima differenza delle percentuali di abitanti immuni (ovvero vaccinati più già immunizzati) tra ogni coppia di regioni non superi il 10% al termine di ogni settimana del piano.

Aiuta la Repubblica a predisporre il piano di vaccinazione, formulando in termini di P.L.I. il problema di stabilire quanti dosi acquistare e quante persone vaccinare in ciascuna regione in ogni settimana del piano nel rispetto dei vincoli di costo, di stoccaggio ed uniformità in modo da massimizzare il numero di persone vaccinate al termine del piano.

Scelte le famiglie di variabili

$$x_h = \text{ numero di dosi acquistate nella settimana } h \qquad h = 1,\dots,26$$

$$y_{ih} = \text{ numero di abitanti della regione } i \text{ vaccinati nella settimana } h \qquad i = 1,\dots,21,\ h = 1,\dots,26$$

parte della formulazione è data dai vincoli e dalla funzione obiettivo riportati qua sotto:

$$\begin{array}{lll}
\max & \displaystyle\sum_{h=1}^{26}\sum_{i=1}^{21} y_{ih} & \\
& \displaystyle\sum_{h=1}^{26} y_{ih} \le a_i - b_i & i = 1,\dots,21 \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{21} y_{i1} \le x_1 & \\
& \displaystyle\sum_{h=1}^{k} x_h - \sum_{h=1}^{k}\sum_{i=1}^{21} y_{ih} \le S & k = 1,\dots,26 \\
& x_h,\ y_{ih} \in \mathbb{Z}_+ & i = 1,\dots,21,\ h = 1,\dots,26.
\end{array}$$

a) Selezionare tra i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

A $x_h \le V_h \quad h = 1,\dots,26$ — aggiungere

B $x_h \le y_{ih} \quad i = 1,\dots,21,\ h = 1,\dots,26$ — non aggiungere

C $x_h = V_h \quad h = 1,\dots,26$ — non aggiungere

D $\displaystyle\sum_{h=1}^{26}\Big(c_h x_h + \sum_{i=1}^{21} t_i y_{ih}\Big) \le D$ — aggiungere

E $\displaystyle\sum_{i=1}^{21} y_{ik} \le \sum_{h=1}^{k} x_h - \sum_{h=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{21} y_{ih} \quad k = 2,\dots,26$ — aggiungere

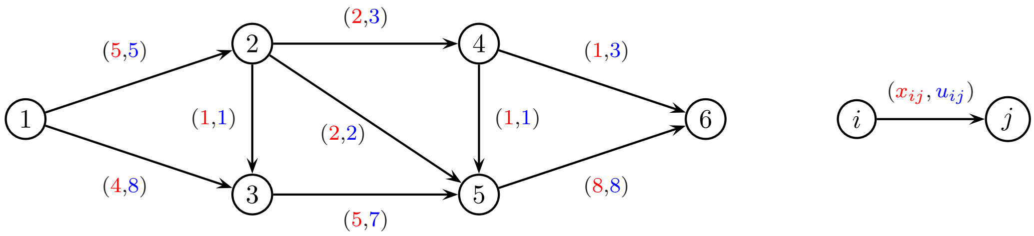
F $\displaystyle y_{ik} \le \sum_{h=1}^{k} x_h - \sum_{h=1}^{k-1} y_{ih} \quad i = 1,\dots,21,\ k = 2,\dots,26$ — non aggiungere

G $\displaystyle\Big(\sum_{h=1}^{k} y_{ih} + b_i\Big)/a_i - \Big(\sum_{h=1}^{k} y_{jh} + b_j\Big)/a_j \le 0.1 \quad i,j = 1,\dots,21,\ j \ne i,\ k = 1,\dots,26$ — aggiungere

H $\max\left\{\left(\sum_{h=1}^{k} y_{ih} + b_i\right)/a_i \ : \ i = 1,...,21\right\} - \min\left\{\left(\sum_{h=1}^{k} y_{ih} + b_i\right)/a_i \ : \ i = 1,...,21\right\} \leq 0.1 \quad k = 1,\ldots,26$

non aggiungere

2) Si consideri il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sul grafo seguente:



a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Il valore del flusso riportato in figura nel taglio $(\{1, 2, 3, 5\}, \{4, 6\})$ è 9. vero

B La capacità del taglio $(\{1, 2, 3, 5\}, \{4, 6\})$ è 12. falso

b) Quale dei seguenti è un cammino aumentante

I $\{1, 3, 2, 4\}$ II $\{1, 3, 5, 2, 4, 6\}$ III $\{1, 3, 5, 6\}$

c) Qual è un taglio di capacità minima?

I $(\{1, 2, 3, 5\}, \{4, 6\})$ II $(\{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\})$ III $(\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\})$

d) Aumentando la capacità dell'arco $(2, 4)$ a $u_{24} = 6$, di quanto aumenta il valore del flusso massimo?

I 3 II 0 III 1

e) Quali capacità è sufficiente modificare (e come) affinché il flusso massimo abbia valore 12? Giustificare la risposta.

$u_{56} = 9$: la capacità di entrambi i tagli di capacità minima $(\{1, 2, 3, 5\}, \{4, 6\})$ e $(\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\})$ diventa 12

esistono altre scelte corrette

3) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare ed il suo problema duale (D):

$$
(P) \quad \begin{array}{lrcrcl}
\max & & & 2x_2 & & \\
& -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
& x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
& & & x_2 & \leq & 2 \\
& 2x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \\
& x_1 & & & \leq & 2
\end{array}
$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $\bar{x} = (3, 2)$ e $\hat{x} = (1, 2)$ sono entrambe soluzioni ottime di (P) falso

B $\bar{x} = (3, 2)$ e $\bar{y} = (0, 0, 2, 0, 0)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari vero

b) Qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (P)?

I $\{(3, 2)\}$ II $\{(1 + t, 2) : 0 \leq t \leq 2\}$ III $\{(1, 2)\}$

c) Qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (D)?

I (D) è inferiormente illimitato   II $\{(t, t, 2(1-t), 0, 0) : 0 \le t \le 1\}$ III $\{(0, 0, 2, 0, 0)\}$

d) Qual è l'insieme delle direzioni ammissibili per $\hat{x} = (1, 2)$?

I $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : 2\xi_1 \le \xi_2 \le \xi_1\}$ II $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_2 \le -|\xi_1|\}$ III $\{(0, 0)\}$

e) Modificare la funzione obiettivo di (P) in modo tale che $x = (2, 1)$ sia una soluzione ottima. Giustificare la risposta.

$c = (1, 0)$: $y = ((0, 0, 0, 0, 1)$ soddisfa gli scarti complementari insieme a x ed è ammissibile

esistono altre scelte corrette

4) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$
(P)\quad \begin{array}{rrcrcl}
\max & 2x_1 & + & 4x_2 & & \\
 & x_1 & & & \le & 4 \\
 & & & x_2 & \le & 2 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & \le & 4 \\
 & -x_1 & & & \le & 1 \\
 & & & -x_2 & \le & 1
\end{array}
\qquad
(D)\quad \begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\min & 4y_1 & + & 2y_2 & + & 4y_3 & + & y_4 & + & y_5 & & \\
 & y_1 & & & + & y_3 & - & y_4 & & & = & 2 \\
 & & & y_2 & + & 2y_3 & & & - & y_5 & = & 4 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \ge & 0
\end{array}
$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{1, 2\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $y = (1, 2, 1, 0, 0)$ è una soluzione duale di base ammissibile — falso

B $d = (0, -1, 1, 0, 1)$ è una direzione di decrescita per (D) — falso

b) Quali sono le soluzioni di base individuate alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $\bar{x} = (4, -1)$, $\bar{y} = (2, 0, 0, 0, -4)$ II $\bar{x} = (4, 2)$, $\bar{y} = (2, 4, 0, 0, 0)$ III $\bar{x} = (4, 2)$, $\bar{y} = (0, 0, 3, 1, 2)$

c) Quali sono la direzione di decrescita d e il passo di spostamento $\bar{\theta}$ individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $d = (-1, -2, 1, 0, 0)$, $\bar{\theta} = 2$ II $d = (-1, -2, 1, 0, 0)$, $\bar{\theta} = 0$ III $d = (-1, -2, 0, 1, 0)$, $\bar{\theta} = 2$

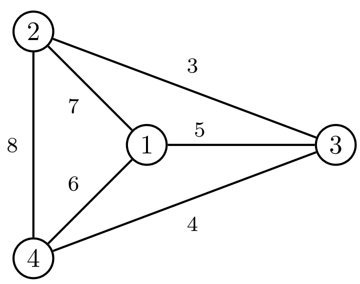
d) Quali sono le soluzioni ottime individuate dall'algoritmo?

I $\bar{x} = (0, 2)$, $\bar{y} = (0, 0, 2, 0, 0)$ II $\bar{x} = (4, 0)$, $\bar{y} = (2, 4, 0, 0, 0)$ III $\bar{x} = (4, 0)$, $\bar{y} = (0, 0, 2, 0, 0)$

e) Modificare un solo coefficiente della funzione obiettivo per il problema duale (D) in modo tale che la soluzione $\bar{x}$ individuata al punto precedente non sia più una soluzione ottima per (P). Giustificare la scelta effettuata.

$b_2 = 1$: la soluzione $x = (0, 2)$ non è più ammissibile, quindi non può essere ottima   esistono altre scelte corrette

5) Si considerino il problema del ciclo hamiltoniano di costo minimo sul seguente grafo



ed il seguente metodo “Branch and Bound”: la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta applicando l’algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando il 2-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita per costo crescente degli archi, e l’albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A L’arco $(1, 2)$ appartiene al ciclo hamiltoniano individuato dall’algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2 — vero

B Il 2-albero di costo minimo nel sottoproblema in cui $x_{23} = 0$ è un ciclo hamiltoniano — vero

b) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall’algoritmo al nodo radice?

I $v_I = 18, v_S = 24$ — II $v_I = 19, v_S = 20$ — III $v_I = 21, v_S = 24$

c) Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

I 1 per ammissibilità — II nessuno — III 1 per inammissibilità

d) Su quante e quali variabili l’algoritmo ramifica prima di terminare?

I 2: x_{23}, x_{34} — II 3: x_{23}, x_{34}, x_{13} — III 4: x_{23}, x_{34}, x_{13}, x_{14}

e) Modificare il costo di 1 solo arco in modo tale che l’algoritmo termini alla radice. Giustificare la scelta effettuata.

$c_{14} = 5$: la soluzione ammissibile di partenza vale 19 esattamente come l’1-albero di costo minimo

esistono altre scelte corrette