RICERCA OPERATIVA (a.a. 2020/21)

Per ciascun esercizio si individuino tutte le risposte corrette alla domanda $a)$ (attenzione: potrebbero essere più di una oppure anche nessuna), l'unica risposta corretta alle domande $b), c), d), e)$ e si risponda alla domanda finale $f)$.

1) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare ed il suo problema duale (D):

$$(P)\quad \begin{array}{rrcrcl} \max & \alpha x_1 & + & \beta x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \end{array}$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Se $\alpha = 10$ e $\beta = 1$, allora $x = (2, 0)$ è una soluzione ottima di (P) — falso

B Se $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, allora $\xi = (2, -1)$ è una direzione di crescita ed è ammissibile per $x = (0, 0)$ — vero

C $x = (0, 0)$ e $y = (0, 0, 0, -\beta, \beta - \alpha)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari — vero

b) Per quale famiglia di coppie di valori la soluzione $x = (0, 0)$ è ottima per (P)?

I $\alpha = \beta,\ \beta > 0$ II $\alpha \leq \beta \leq 0$ III nessuna

c) Per quale coppia di valori l'unica soluzione ottima di (P) è $x = (0, 0)$?

I $\alpha = -2,\ \beta = -1$ II $\alpha = -1,\ \beta = -1$ III $\alpha = 1,\ \beta = 1$

d) Se $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (P)?

I $\{(3, 0)\}$ II $\{(t, 3 - t)\ :\ 2 \leq t \leq 3\}$ III $\{(1, 2)\}$

e) Qual è l'insieme delle direzioni ammissibili per $x = (2, 1)$?

I $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : 2\xi_2 \leq \xi_1 \leq -\xi_2\}$ II $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 + \xi_2 \leq 0\}$ III $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 \geq 2\xi_2\}$

f) Scegliere α e β in modo tale che $x = (2, 1)$ sia l'unica soluzione ottima di (P). Giustificare la risposta.

$\alpha = 0,\ \beta = 1$: x è soluzione primale di base, a cui corrisponde la soluzione duale $y = (1/2, 0, 1/2, 0, 0)$ non degenere

esistono altre scelte corrette

2) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$(P)\quad \begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & & & \leq & 3 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & & & -x_2 & \leq & 0 \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{rrcrcrcrcrcl} \min & 3y_1 & + & 3y_2 & + & 2y_3 & & & & & & \\ & y_1 & + & y_2 & - & y_3 & - & y_4 & & & = & 1 \\ & -y_1 & & & + & y_3 & & & - & y_5 & = & 2 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \geq & 0 \end{array}$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{4, 5\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A La regione ammissibile di (P) è l'involucro convesso di $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(3, 0)$, $(3, 5)$ — vero

B La direzione $\xi = (0, 1)$ è una direzione di recessione per la regione ammissibile di (P) — falso

C $B = \{1, 3\}$ è una base falso

b) Quali sono le soluzioni di base individuate alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $\bar{x} = (0, 0)$, $\bar{y} = (0, 0, 0, 1, 2)$ II $\bar{x} = (3, 0)$, $\bar{y} = (1, 0, 0, 0, -3)$ III $\bar{x} = (0, 0)$, $\bar{y} = (0, 0, 0, -1, -2)$

c) Quali sono la direzione di crescita ξ e il passo di spostamento $\bar{\lambda}$ individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $\xi = (1, 0)$, $\bar{\lambda} = 3$ II $\xi = (0, 1)$, $\bar{\lambda} = 2$ III $\xi = (1, 0)$, $\bar{\lambda} = 2$

d) Qual è la nuova base individuata al termine della prima iterazione dell'algoritmo?

I $B = \{1, 5\}$ II $B = \{1, 4\}$ III $B = \{2, 5\}$

e) Quali sono le soluzioni ottime individuate dall'algoritmo?

I $\bar{x} = (3, 5)$, $\bar{y} = (3, 2, 0, 0, 0)$ II $\bar{x} = (3, 5)$, $\bar{y} = (0, 3, 2, 0, 0)$ III $\bar{x} = (0, 2)$, $\bar{y} = (0, 0, -3, 2, 0)$

f) Scegliere una funzione obiettivo per il problema primale (P) in modo tale che la soluzione $\bar{x}$ individuata al punto precedente rimanga ottima ma la soluzione ottima del problema duale (D) sia degenere. Giustificare la scelta effettuata.

$c = A_2 = (1, 0)$: $x = (3, 0)$ è soluzione ottima di base $B = \{2, 3\}$ ed è non degenere, pertanto la soluzione duale di base $y = (0, 1, 0, 0, 0)$ è l'unica soluzione ottima di (D) e risulta degenere

esistono altre scelte corrette

3) Si considerino il problema dello zaino

$$\begin{array}{lccccccccc} \max & 21x_1 & + & 12x_2 & + & 15x_3 & + & 19x_4 & & \\ & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \leq & 7 \\ & & & & & & & & & \end{array}$$
$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \in \{0, 1\}$$

ed il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo *greedy* basato sui rendimenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A L'ordinamento di rendimento decrescente delle variabili è x_4, x_3, x_1, x_2 falso

B La soluzione ammissibile di partenza dell'algoritmo è $(0, 0, 1, 1)$ vero

C Nel sottoproblema in cui $x_1 = 0$ la soluzione ottima del rilassamento continuo non è ammissibile vero

b) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $v_I = 42, v_S = 38$ II $v_I = 34, v_S = 42$ III $v_I = 34, v_S = 35$

c) Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

I 1 per inammissibilità II nessuno III 1 per ammissibilità

d) Qual è la soluzione ottima del rilassamento continuo nel sottoproblema in cui $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$?

I $(0, 1, 1, 0)$ II $(0, 1, 1, 1/3)$ III $(0, 0, 1, 1)$

e) Su quante e quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

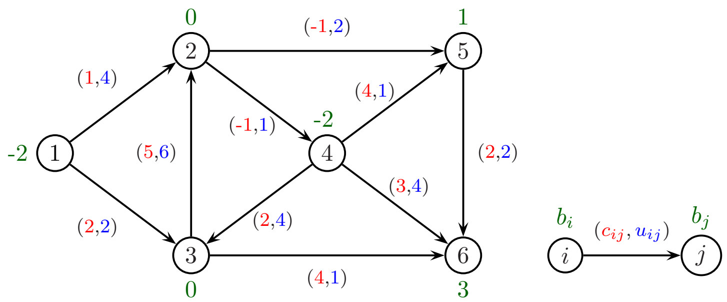
I 2: x_1, x_2 | II 3: x_1, x_2, x_4 | III 4: x_1, x_2, x_4, x_3

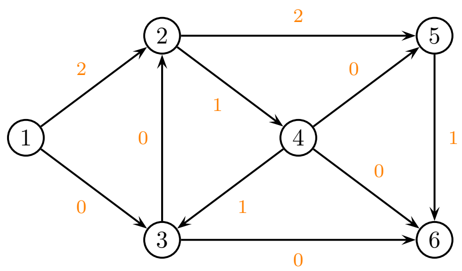
f) Modificare il beneficio (coefficiente della funzione obiettivo) di 1 solo oggetto in modo tale che la soluzione ammissibile di partenza risulti essere una soluzione ottima. Giustificare la scelta effettuata.

$c_1 = 19$: le iterazioni dell'algoritmo non cambiano ma la soluzione ottima che era stata individuata al nodo "$x_1 = 1$" ora ha lo stesso valore della soluzione ammissibile di partenza

esistono altre scelte corrette

4) Si considerino il problema di flusso di costo minimo sul grafo di sinistra e lo pseudoflusso x riportato a destra:





a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Lo pseudoflusso è minimale — vero

B Lo pseudoflusso è minimale qualora si aumenti il costo di $(2,4)$ a 1 ($c_{24} = 1$) — falso

C $\{3,4,2,5\}$ è un cammino aumentante — falso

b) Quali sono il vettore degli sbilanciamenti e lo sbilanciamento complessivo?

I $e_x = (0, -1, 1, 2, 0, -2)$, $g(x) = 3$ | II $e_x = (0, -1, 1, 2, 0, -2)$, $g(x) = 0$ | III $e_x = (0, 1, -1, -1, 0, 1)$, $g(x) = 2$

c) Per quali valori del costo dell'arco $(1,3)$ lo pseudoflusso rimane minimale?

I $c_{13} \geq 0$ | II $c_{13} \geq 2$ | III $c_{13} \leq 2$

d) Quale dei seguenti è un cammino aumentante di costo minimo?

I $\{3,4,2,5\}$ | II $\{4,5,6\}$ | III $\{3,4,2\}$

e) Qual è la massima quantità di flusso che si può inviare lungo il cammino aumentante $\{4,6\}$?

I $\theta = 1$ | II $\theta = 2$ | III $\theta = 4$

f) Come bisogna modificare il bilancio dei nodi e/o il costo degli archi in modo che lo pseudoflusso diventi un flusso ammissibile di costo minimo? Giustificare la risposta.

$b = (-2, -1, 1, 0, 1, 1)$ garantisce l'ammissibilità e la minimalità è preservata (non dipende da b)