

## RICERCA OPERATIVA (a.a. 2020/21)

Per ciascun esercizio si individuino tutte le risposte corrette (attenzione: potrebbero essere più di una oppure anche nessuna) e si risponda alle eventuali domande finali.

1) Per arginare la pandemia in corso, la Regione Etruria ha deciso di assegnare il trasporto scolastico della provincia alfa al consorzio di autotrasportatori *TuttiSicuriTuttiSani* che dispone di  $m$  autobus di varie capienze. Più precisamente, l'autobus  $j$  ha una capienza di  $c_j$  posti. Nella provincia sono presenti  $n$  scuole e  $a_i$  è il numero di studenti della scuola  $i$  che necessitano del servizio di trasporto (con  $a_i > c_j$  per ogni coppia “scuola autobus”). Per esigenze sanitarie di contenimento del rischio di contagio, la regione richiede che ciascun autobus utilizzato trasporti studenti di una sola scuola e che la più alta percentuale dei posti occupati sugli autobus sia la più piccola possibile.

Aiuta il coordinatore del consorzio a pianificare il trasporto, formulando in termini di P.L.I. il problema di garantire il trasporto a tutti gli studenti della provincia nel rispetto dei vincoli sanitari e di capienza in modo da minimizzare la massima percentuale dei posti occupati sugli autobus.

Scelte le famiglia di variabili

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se l'autobus } j \text{ trasporta studenti della scuola } i \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} = \text{numero di studenti della scuola } i \text{ trasportati sull'autobus } j$$

e la variabile ausiliaria  $u$  per rappresentare un'approssimazione superiore della massima percentuale di posti occupati, parte della formulazione è data dai vincoli e dalla funzione obiettivo riportati qua sotto:

$$\min u$$

$$\sum_{i=1}^n y_{ij} \leq 1 \quad j = 1, \dots, m$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}, u \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$$

Selezionare tra i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare **correttamente** la formulazione.

A  $\sum_{j=1}^m y_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n$

non aggiungere

B  $\sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, n$

aggiungere

C  $\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n$

non aggiungere

D  $x_{ij}y_{ij} \leq c_j \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$

non aggiungere

E  $x_{ij} \leq c_j y_{ij} \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$

aggiungere

F  $\left( \sum_{i=1}^n x_{ij} \right) / c_j \geq u \quad j = 1, \dots, m$

non aggiungere

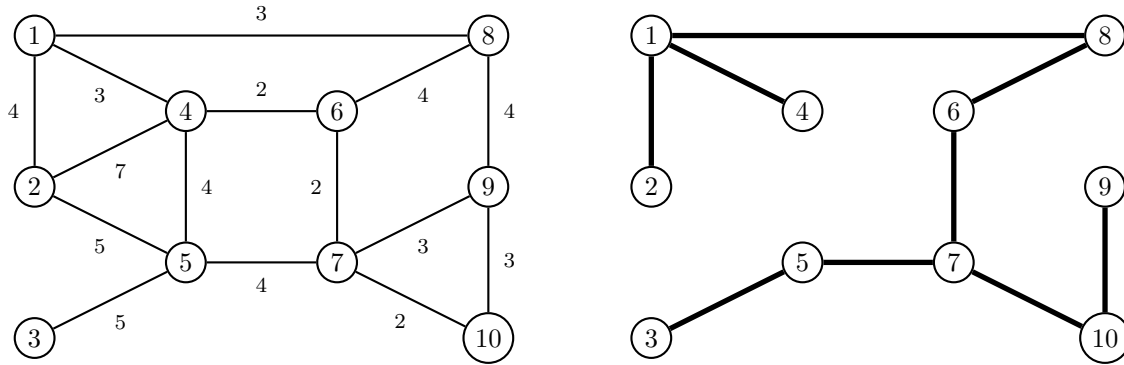
G  $\left( \sum_{i=1}^n x_{ij} \right) / c_j \leq u \quad j = 1, \dots, m$

aggiungere

H  $x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$

aggiungere

2) Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul grafo di sinistra:



a) Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

- A Il costo dell'albero è 30  vero
- B Sostituendo l'arco (1, 4) con l'arco (2, 4) si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato  falso
- C Il costo dell'arco (3, 5) non è rilevante per l'eventuale ottimalità dell'albero  vero
- D Non è un albero di costo minimo perché l'arco (7, 9) non soddisfa la condizione di ottimalità per cicli  falso
- E Non è un albero di costo minimo perché l'arco (1, 8) non soddisfa la condizione di ottimalità per tagli  vero
- F Non è un albero di costo minimo perché l'arco (4, 6) non soddisfa la condizione di ottimalità per cicli  vero

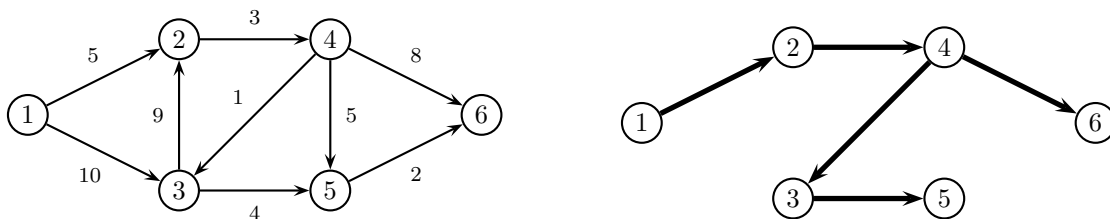
b) Modificare il costo di un arco. Quali arco e costo scegliere affinché l'albero a destra sia un albero di costo minimo?

arco (4, 6) con costo  $c_{46} \geq 4$

c) Si mantenga il costo modificato al punto b) e si aggiunga l'arco (3, 10). Quale costo scegliere per il nuovo arco affinché l'albero a destra rimanga un albero di costo minimo?

$c_{310} \geq 5$

3) Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo di sinistra:



a) Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

- A  $d = (0, 5, 10, 8, 13, 16)$  è il vettore delle etichette relative all'albero  falso
- B Il costo dell'albero è 51  vero
- C Non è un albero dei cammini minimi perché l'arco (3, 2) non soddisfa la corrispondente condizione di Bellman  falso
- D Non è un albero dei cammini minimi perché l'arco (1, 3) non soddisfa la corrispondente condizione di Bellman  falso
- E Sostituendo l'arco (4, 6) con l'arco (5, 6) si ottiene un albero dei cammini minimi  vero
- F Il cammino dal nodo 1 al nodo 5 sull'albero è di costo minimo  vero

b) Modificare il costo di un arco. Quali arco e costo scegliere affinché l'albero a destra sia un albero dei cammini minimi?

arco (3, 5) con costo  $c_{35} \geq 5$

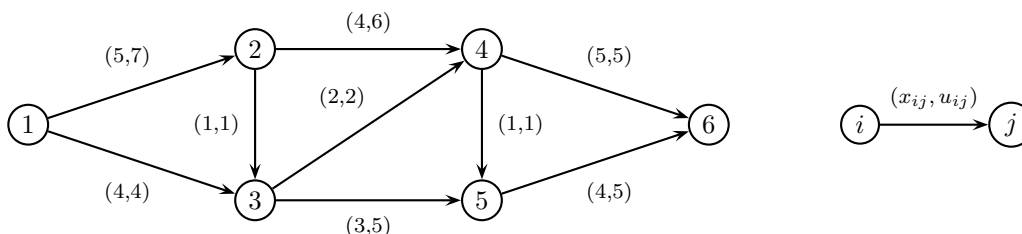
esistono altre scelte corrette

c) Quali costi è sufficiente modificare (e come) affinché il cammino minimo dal nodo 1 al nodo 5 abbia costo 14?

arco (1, 2) con costo  $c_{12} = 6$

esistono altre scelte corrette

4) Si consideri il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sul grafo seguente:



a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

- A Il valore del flusso riportato in figura è 10  falso
- B Il flusso nel taglio  $(\{1, 2, 4\}, \{3, 5, 6\})$  è 9  vero
- C Il taglio  $(\{1, 2, 3, 5\}, \{4, 6\})$  ha capacità 13  vero
- D Non esistono cammini aumentanti rispetto al flusso riportato in figura  falso
- E Il taglio di capacità minima ha capacità 10  vero
- F Aumentando la capacità dell'arco (1, 3) il valore del flusso massimo non cambia  vero

b) Modificare la capacità di un arco. Quali arco e capacità scegliere affinché il flusso in figura sia di valore massimo?

arco (1, 2) con capacità  $c_{12} = 5$

esistono altre scelte corrette

c) Quali capacità è sufficiente modificare (e come) affinché il flusso massimo sia di valore uguale a 12?

$c_{13} = 5, c_{46} = c_{56} = 6$

esistono altre scelte corrette