

RICERCA OPERATIVA (a.a. 2019/20)

Per ciascun esercizio si individuino tutte le risposte corrette (attenzione: potrebbero essere più di una oppure anche nessuna) e si risponda alle eventuali domande finali.

1) Siano dati m contenitori di capacità C_1, \dots, C_m e n oggetti di peso p_1, \dots, p_n disponibili in d_1, \dots, d_n copie. Almeno q_i copie di ciascun oggetto i devono venir inserite nei contenitori utilizzando il minor numero possibile di contenitori nel rispetto della capacità degli stessi.

Scelte le 2 famiglie di variabili

x_{ij} = numero di copie dell'oggetto i inserite nel contenitore j

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se il contenitore } j \text{ viene utilizzato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

parte della formulazione in termini di PLI del problema è data dai vincoli e dalla funzione obiettivo riportati qua sotto:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^m y_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^m x_{ij} \geq q_i \quad i = 1, \dots, n \\ & x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, y_j \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Quali dei seguenti vincoli permettono di completare correttamente la formulazione?

A $\sum_{j=1}^m p_i x_{ij} \leq C_k y_k, \quad x_{ik} \geq d_i y_k \quad i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m$ Falso

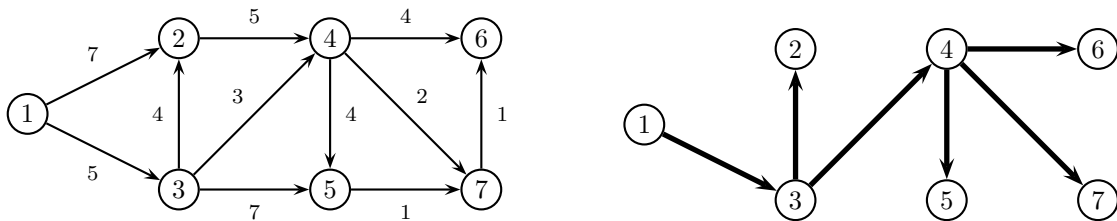
B $\sum_{i=1}^n p_i x_{ij} \leq C_j y_j \quad j = 1, \dots, m$ Vero Falso

C $\sum_{i=1}^n p_i x_{ij} = C_j y_j \quad j = 1, \dots, m, \quad x_{ij} \leq d_i \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ Falso

D $x_{ij} \leq d_i y_j \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ Falso

E $\sum_{i=1}^n p_i x_{ij} \leq C_j y_j \quad j = 1, \dots, m, \quad \sum_{j=1}^m x_{ij} \leq d_i \quad i = 1, \dots, n$ Falso

2) Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo di sinistra:



a) Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

A $d = (0, 9, 5, 8, 12, 12, 13)$ è il vettore delle etichette relative all'albero Falso

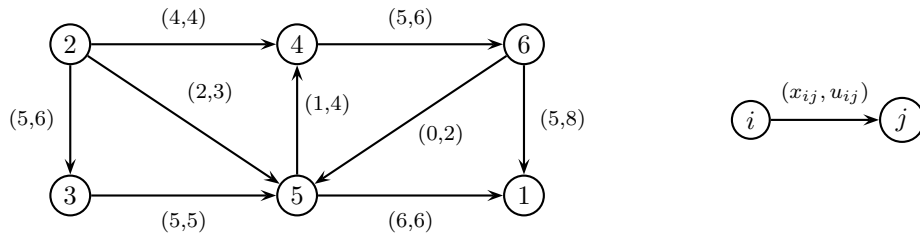
B Sostituendo l'arco (4, 5) con l'arco (3, 5) si ottiene un albero che ha lo stesso vettore di etichette di quello dato Vero

C Non è un albero dei cammini minimi perché l'arco (1, 2) non soddisfa la corrispondente condizione di Bellman Vero

D Non è un albero dei cammini minimi perché l'arco (5, 7) non soddisfa la corrispondente condizione di Bellman Falso

b) Quali costi bisogna modificare (e come) affinché l'albero a destra sia un albero dei cammini minimi? $c_{12} \geq 9, c_{76} \geq 1$

3) Si consideri il problema del flusso massimo dal nodo 2 al nodo 1 sul grafo seguente:



a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

- A Il valore del flusso riportato in figura è 11 Vero
- B Non esistono cammini aumentanti rispetto al flusso riportato in figura Falso
- C Il taglio $(\{2, 3, 4, 5\}, \{1, 6\})$ è di capacità minima Vero
- D Aumentando la capacità dell'arco $(3, 5)$ il valore del flusso massimo non cambia Vero

b) Quali capacità è sufficiente modificare (e come) affinché il flusso riportato in figura sia di valore massimo?

$$c_{56} = 5 \text{ oppure } c_{25} = 2 \text{ oppure } c_{46} = 5 \text{ oppure } c_{61} = 5$$

4) Si consideri la seguente coppia di problemi duali di Programmazione Lineare:

$$\begin{array}{ll}
 \max & x_1 + x_2 \\
 (P) & x_1 + x_2 \leq 3 \\
 & x_1 - 2x_2 \leq 3 \\
 & -x_1 + x_2 \leq 1 \\
 & x_2 \leq 2 \\
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \min & 3y_1 + 3y_2 + y_3 + 2y_4 \\
 (D) & y_1 + y_2 - y_3 = 1 \\
 & y_1 - 2y_2 + y_3 + y_4 = 1 \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0.
 \end{array}$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

- A $(1, 2)$ e $(1, 0, 0, 0)$ sono entrambe soluzioni di base Vero
- B $(2, 1)$ e $(1, 0, 0, 0)$ sono entrambe soluzioni di base Falso
- C $(2, 1)$ e $(1, 0, 0, 0)$ sono soluzioni ottime rispettivamente per (P) e (D) Vero
- D $(1, 2)$ e $(1, 0, 0, 0)$ sono soluzioni ottime rispettivamente per (P) e (D) Vero

b) Qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema (P) ? $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 3, 0 \leq x_2 \leq 2\}$

5) Si supponga di risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{array}{ll}
 \max & 2x_1 - x_2 \\
 & -x_1 \leq 0 \\
 & -x_2 \leq 0 \\
 & x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & x_2 \leq 1
 \end{array}$$

tramite l'algoritmo del simplesso primale partendo dalla base $B = \{1, 4\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? (suggerimento: utilizzare la rappresentazione grafica in \mathbb{R}^2).

- A La soluzione di base ottenuta alla seconda iterazione è $(0, 1)$ Falso
- B La base ottenuta alla seconda iterazione è $\{1, 2\}$ Falso
- C La soluzione di base ottenuta alla seconda iterazione è $(1, 1)$ Vero
- D L'indice uscente alla prima iterazione è $h = 4$ Falso

b) Quanti cambi di base sono necessari per trovare una soluzione ottima? Qual è la soluzione ottima trovata?

2 cambi di base, la soluzione ottima è (2, 0)

6) Si consideri il seguente problema dello zaino:

$$\begin{aligned} \max \quad & 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \\ & 10x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 13 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Le valutazioni inferiore e superiore del valore ottimo del problema sono: $v_I(P) = 15$ e $v_S(P) = 17$ Falso

B Le valutazioni inferiore e superiore del valore ottimo del problema sono: $v_I(P) = 12$ e $v_S(P) = 16$ Vero

C Una soluzione ottima del rilassamento continuo è (1, 3/4, 0, 0) Falso

D Una soluzione ottima del rilassamento continuo è (2/5, 1, 1, 1) Vero

b) Qual è la soluzione ottima del problema? Quanti nodi dell'albero di enumerazione bisogna visitare prima di trovare la soluzione ottima?

la soluzione ottima è (1, 0, 1, 0), 4 nodi dell'albero