RICERCA OPERATIVA (a.a. 2019/20)

Nome Cognome: **Matricola:** **Corso:** A B

1) La multinazionale *Fishbus*, leader nel commercio di pesce surgelato, decide di aprire m magazzini per rifornire gli n mercati della Longobardia. La capacità di ogni magazzino può essere scelta tra q_1, q_2, q_3 e q_4 quintali di pesce a seconda delle esigenze dell'azienda. Il costo di apertura di ogni magazzino è proporzionale alla capacità scelta, dove c individua il costo per quintale (se un magazzino viene aperto con capacità q_i quintali, il relativo costo di apertura è cq_i). La domanda del mercato i è stimata in d_i quintali.

Si aiuti la multinazionale a decidere la capacità dei magazzini e quali mercati assegnare a ciascun magazzino, in modo da minimizzare il costo totale di apertura nel rispetto delle capacità scelte. Al tal fine si formuli il problema in termini di P.L.I.

SVOLGIMENTO

Introduciamo le seguenti nm variabili logiche:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il mercato } i \text{ è assegnato al magazzino } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m.$$

I vincoli di semiassegnamento garantiscono che ogni mercato sia assegnato ad uno ed un solo magazzino:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Le variabili binarie

$$y_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{se al magazzino } j \text{ è attribuita la capacità } q_k, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad k = 1, \ldots, 4, \quad j = 1, \ldots, m.$$

individuano la capacità scelta per ciascun magazzino. Affinché un'unica capacità sia selezionata per ciascun magazzino j, le variabili devono soddisfare i vincoli:

$$\sum_{k=1}^{4} y_{kj} = 1, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

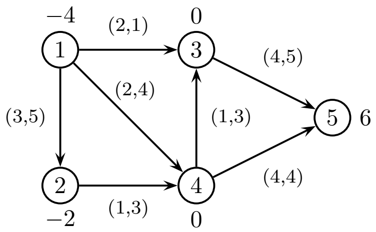
I vincoli di capacità relativi ai magazzini possono allora essere formulati come:

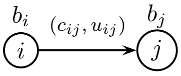
$$\sum_{i=1}^{n} d_i x_{ij} \leq \sum_{k=1}^{4} q_k y_{kj}, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

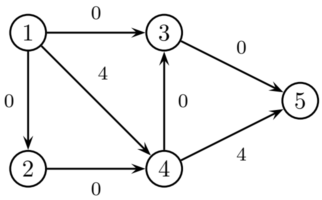
La formulazione del problema è quindi

$$\begin{array}{lll} \min & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{4} c q_k y_{kj} & \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 & i = 1, \ldots, n \\ & \displaystyle\sum_{k=1}^{4} y_{kj} = 1 & j = 1, \ldots, m \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i x_{ij} \leq \sum_{k=1}^{4} q_k y_{kj} & j = 1, \ldots, m \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m \\ & y_{kj} \in \{0, 1\} & k = 1, 2, 3, 4, \quad j = 1, \ldots, m \end{array}$$

2) Si consideri il problema di flusso di costo minimo sul grafo di sinistra.





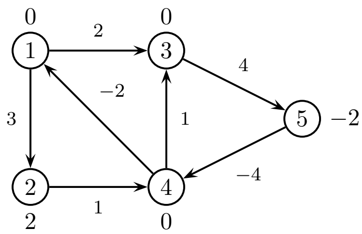


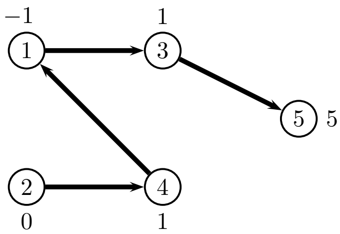
Si risolva il problema utilizzando l'algoritmo dei cammini minimi successivi a partire dallo pseudoflusso minimale riportato sul grafo a destra. Ad ogni iterazione si forniscano l'albero dei cammini minimi con le relative etichette, il cammino aumentante selezionato con la quantità di flusso inviata, lo pseudoflusso ottenuto con il suo costo, i relativi sbilanciamenti dei nodi e lo sbilanciamento complessivo. Al termine si fornisca la soluzione ottima trovata.

SVOLGIMENTO

Lo pseudoflusso dato x ha costo 24 con vettore degli sbilanciamenti $e_x = (0, 2, 0, 0, -2)$ e sbilanciamento complessivo $g(x) = 2$. Per ogni iterazione viene riportato il grafo residuo (con costi degli archi e sbilanciamento sui nodi), l'albero dei cammini minimi individuato (con le relatice etichette sui nodi) in cui viene evidenziato il cammino aumentante P selezionato. Viene inoltre riportato lo pseudoflusso ottenuto in seguito all'invio di θ unità di flusso lungo P con il suo costo e lo sbilanciamento complessivo.

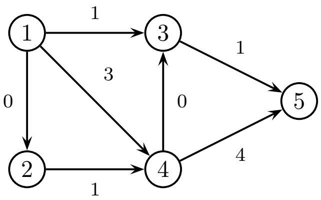
it. 1)





$C(P) = 5$

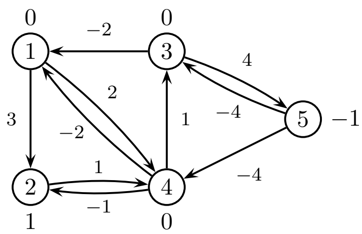
$\theta = 1$

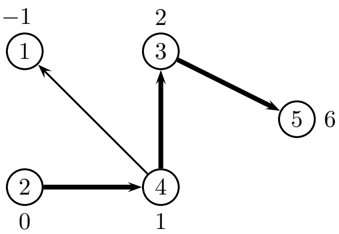


$cx = 29$

$g(x) = 1$

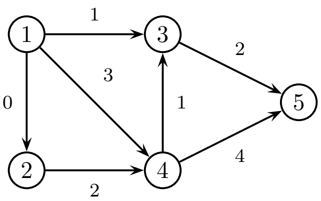
it. 2)





$C(P) = 6$

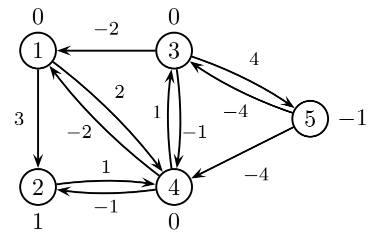
$\theta = 1$

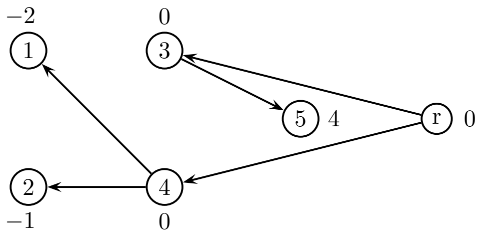


$cx = 35$

$g(x) = 0$

Poiché lo sbilanciamento complessivo risulta nullo, lo pseudoflusso è ammissibile e pertanto è un flusso di costo minimo. Come ulteriore verifica della sua ottimalità, si può osservare che il grafo residuo associato (riportato sotto a sinistra) non contiene cicli orientati di costo negativo. Infatti, l'albero riportato a destra costituisce un corrispondente albero dei cammini minimi di radice fittizia r.





3) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & + & 3x_2 & & \\ & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & & & x_2 & \leq & 1 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ & x_1 & & & \leq & 1 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1,3\}$. Per ogni iterazione si indichino la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h. Modificare il termine noto di un solo vincolo in modo tale che la soluzione $x = (0,1)$ risulti essere una soluzione ottima del problema. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1,3\}$: $\quad A_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \bar{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$

$$\bar{y}_B^1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \bar{y}_N^1 = 0, \ \bar{y}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ k = 4,$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \end{bmatrix}, \ \bar{\theta} = 0, \ h = 3 \text{ [cambio di base degenere duale]}.$$

it. 2) $B = \{1,4\}$: $\quad A_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \ A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/7 & -3/7 \\ 2/7 & 1/7 \end{bmatrix}, \ \bar{x}^2 = \begin{bmatrix} 1/7 & -3/7 \\ 2/7 & 1/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 6/7 \end{bmatrix},$

$$\bar{y}_B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/7 & -3/7 \\ 2/7 & 1/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \bar{y}_N^2 = 0, \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x}^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/7 \\ 6/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/7 \\ 6/7 \\ 3/7 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \text{STOP}.$$

$\bar{x}^2 = (3/7, 6/7)$ è una soluzione ottima primale, mentre $\bar{y}^2 = (1,0,0,0,0)$ è una soluzione ottima duale.

$x = (0,1)$ è la soluzione primale di base $\bar{x}^1$ relativa alla base $B = \{1,3\}$ analizzata alla prima iterazione: $\bar{x}^1$ non è ammissibile in quanto soddisfa tutti i vincoli tranne il quarto. È pertanto sufficiente modificare il termine noto di questo vincolo in modo tale che $\bar{x}^1$ lo soddisfi, basta cioè sostituire $b_4 = 0$ con qualsiasi valore maggiore od uguale a 1. In tal caso alla base $B = \{1,3\}$ corrispondono la soluzione primale ammissibile $\bar{x}^1$ e la soluzione duale ammissibile $\bar{y}^1 = (1,0,0,0,0)$. Poiché una coppia di soluzioni di base soddisfa sempre la condizione degli scarti complementari, $\bar{x}^1$ e $\bar{y}^1$ sono ottime rispettivamente per il problema primale e duale.

4) Si consideri il seguente problema dello zaino:

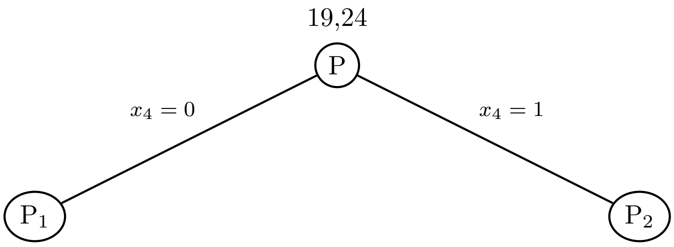
$$\begin{array}{rcccccccl} \max & 11x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & + & 13x_4 & \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 7x_4 & \leq 9 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \in \{0,1\} & & & & \end{array}$$

Si individui una soluzione ottima del problema utilizzando il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo "greedy" basato sui rendimenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

SVOLGIMENTO

I rendimenti delle variabili x_1, x_2, x_3, x_4 sono rispettivamente $11/3 = 3 + 2/3$, $6/2 = 3$, $2/1 = 2$ e $13/7 = 1 + 6/7$. Per applicare l'algoritmo "greedy" basato sui rendimenti si analizzano le variabili in ordine decrescente di rendimento, cioè x_1, x_2, x_3, x_4: si ottiene la soluzione ammissibile $x = (1,1,1,0)$ di valore 19 che è una valutazione inferiore del valore ottimo del problema, quindi $v_I(P) = 19$. Analizzando le variabili nello stesso ordine, si trova la soluzione ottima del rilassamento continuo $(1,1,1,3/7)$ di valore 24+1/2 che è una valutazione superiore del valore ottimo del problema, quindi $v_S(P) = \lfloor 24 + 1/2 \rfloor = 24$.

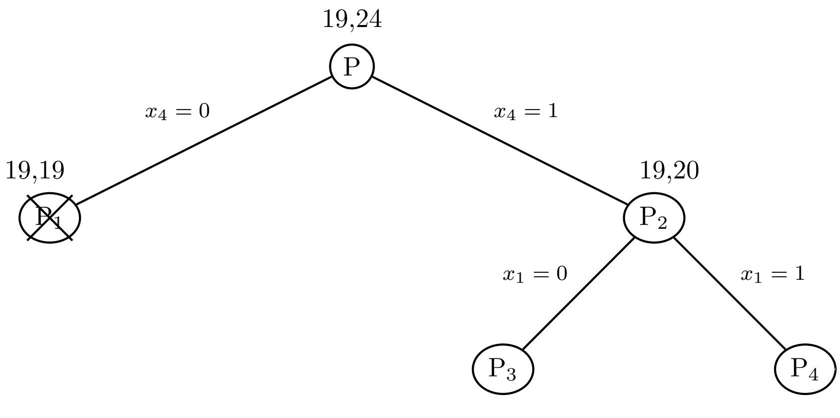
Iniziamo l'esplorazione dell'albero di enumerazione ramificando sulla variabile x_4:



La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_1 è $(1,1,1,0)$ di valore $19 = v_S(P_1)$. Poiché $v_S(P_1) = v_I(P)$, possiamo chiudere il nodo P_1.

La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_2 è $(2/3,0,0,1)$ di valore 20, quindi $v_S(P_2) = 20$. Poiché $v_S(P_2) > v_I(P) = 19$ e la soluzione ottima non è ammissibile, il nodo P_2 rimane aperto.

Dal nodo P_2 ramifichiamo sulla variabile x_1:



La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_3 è $(0,1,0,1)$ di valore $19 = v_S(P_3)$. Poiché $v_S(P_3) = v_I(P)$, possiamo chiudere il nodo P_3.

Possiamo chiudere anche il nodo P_4 poiché non esistono soluzioni ammissibili che soddisfino i vincoli $x_4 = x_1 = 1$ imposti nel problema P_4. Non essendoci altri nodi da esaminare, l'algoritmo termina.

In conclusione, l'agoritmo ha identificato due soluzioni ottime di valore 19: $(1,1,1,0)$ e $(0,1,0,1)$.