RICERCA OPERATIVA (a.a. 2019/20)

Nome Cognome: **Matricola:** **Corso:** A B

1) L'importante gruppo commerciale *Pentathlon* ha deciso di aprire m punti vendita per rifornire n società di atletica leggera. Sia u_j il massimo numero di società che il punto vendita j è in grado di rifornire. Un'indagine di mercato ha permesso di stimare il coefficiente di soddisfacimento s_{ij} della società i nel caso in cui venisse rifornita dal punto vendita j. Se il soddisfacimento totale delle società rifornite dal punto vendita j risulterà maggiore o uguale ad una prefissata soglia S, il punto vendita riceverà un premio p_j dalla Federazione di Atletica Leggera.

Si formuli in termini di P.L.I. il problema di assegnare le n società agli m punti vendita massimizzando la somma dei premi ricevuti dai punti vendita nel rispetto dei vincoli di capacità.

SVOLGIMENTO

Per descrivere il problema, introduciamo le seguenti variabili logiche:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la società } i \text{ è assegnata al punto vendita } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se il punto vendita } j \text{ riceverà il premio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Ogni società deve essere assegnata ad esattamente un punto vendita:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots n.$$

I vincoli di capacità relativi ai punti vendita devono essere rispettati:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq u_j \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Il punto vendita j riceverà il premio, e la corrispondente y_j potrà assumere il valore 1, se e solo se il soddisfacimento totale delle società assegnate a j risulterà maggiore o uguale a S:

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ij} x_{ij} \geq S y_j \qquad j = 1, \ldots, m.$$

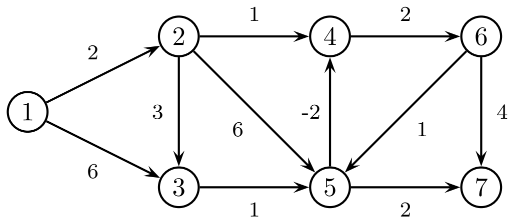
La funzione obiettivo è data dalla somma dei premi ricevuti dai punti vendita:

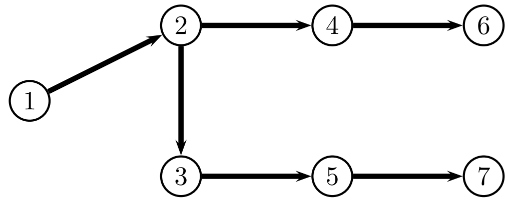
$$\sum_{j=1}^{m} p_j y_j.$$

La formulazione risultante è:

$$\begin{array}{lll} \max & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} p_j y_j & \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 & i = 1, \ldots, n \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq u_j & j = 1, \ldots, m \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} s_{ij} x_{ij} \geq S y_j & j = 1, \ldots, m \\ & x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} & i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m. \end{array}$$

2) Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo di sinistra:





Dire se l'albero sulla destra è un albero dei cammini minimi. Cambiando il costo dell'arco $(3, 5)$ da 1 a 4, trovare un albero dei cammini minimi di radice 1 applicando eventualmente un algoritmo opportuno. L'albero così individuato è l'unico albero dei cammini minimi? Giustificare tutte le risposte.

SVOLGIMENTO

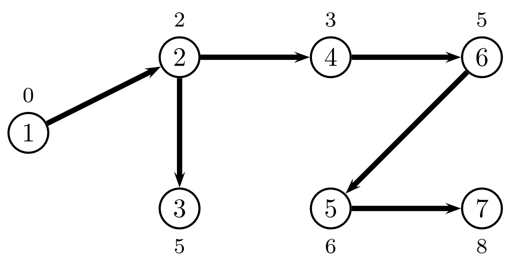
Il vettore di etichette associato all'albero dato è $d = (0, 2, 5, 3, 6, 5, 8)$. La seguente tabella mostra che tutti gli archi (i, j) non appartenenti all'albero soddisfano le condizioni di Bellman $d_i + c_{ij} \geq d_j$. Pertanto, l'albero dato è un albero dei cammini minimi.

(i,j)	$d_i + c_{ij}$	d_j
$(1,3)$	$0+6$	5
$(2,5)$	$2+6$	6
$(5,4)$	$6-2$	3
$(6,5)$	$5+1$	6
$(6,7)$	$5+4$	8

Cambiando il costo dell'arco $(3, 5)$ da 1 a 4, le etichette dei nodi 5 e 7 adesso diventano $d_5 = 9$ e $d_7 = 11$ e gli archi $(2, 5)$, $(6, 5)$ e $(6, 7)$ non soddisfano più le corrispondenti condizioni di Bellman. Pertanto, l'albero dato non è più un albero dei cammini minimi. Per trovarne uno, è possibile applicare l'algoritmo di Bellman-Ford a partire da tale albero insieme alle corrispondenti etichette $d = (0, 2, 5, 3, 9, 5, 11)$ e all'insieme $Q = \{2, 6\}$ che contiene i nodi coda di archi che non soddisfano le condizioni di Bellman. Per ciascuna iterazione dell'algoritmo la tabella riporta il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette e l'insieme dei nodi candidati Q al termine dell'iterazione.

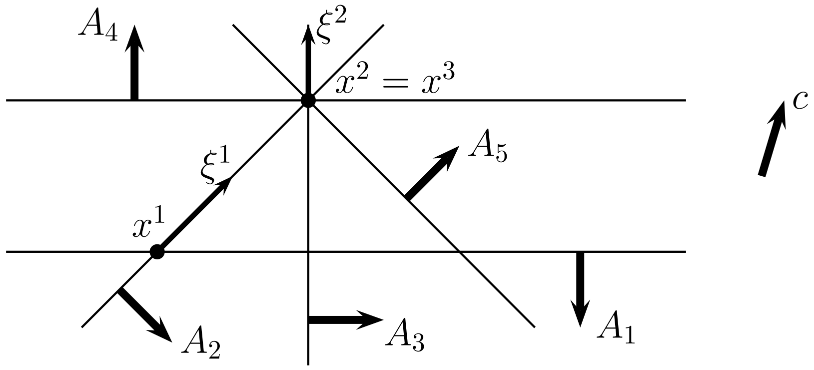
it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	Q
0		$-$	1	2	2	3	4	5	0	2	5	3	9	5	11	$\{2,6\}$
1	2	$-$	1	2	2	2	4	5	0	2	5	3	8	5	11	$\{6,5\}$
2	6	$-$	1	2	2	6	4	6	0	2	5	3	6	5	9	$\{5,7\}$
3	5	$-$	1	2	2	6	4	5	0	2	5	3	6	5	8	$\{7\}$
4	7	$-$	1	2	2	6	4	5	0	2	5	3	6	5	8	$\emptyset$

L'albero così individuato è illustrato in figura, riportando i costi dei cammini ottimi (etichette finali dei nodi).



Poiché nessun arco non appartenente all'albero soddisfa la corrispondente condizione di Bellman come uguaglianza, l'albero è l'unico albero dei cammini minimi.

3) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base x e la direzione di spostamento (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.

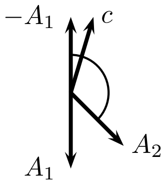


SVOLGIMENTO

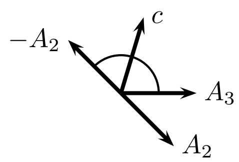
it. 1) $B = \{1, 2\}$, $y_1 < 0$, $y_2 > 0$ (in quanto c appartiene al cono generato da $-A_1$ e A_2, cioè $c \in \text{cono}(-A_1, A_2)$, come mostrato in figura (a)), $h = 1$, $k = \min\{3, 4, 5\} = 3$ (regola anticiclo di Bland). La base è sia primale ($I(x^1) = B$) che duale non degenere ($y_1, y_2 \neq 0$).

it. 2) $B = \{2, 3\}$, $y_2 < 0$, $y_3 > 0$ (in quanto c appartiene al cono generato da $-A_2$ e A_3, cioè $c \in \text{cono}(-A_2, A_3)$, come mostrato in figura (b)), $h = 2$, $k = \min\{4, 5\} = 4$ (regola anticiclo di Bland). La base è primale degenere ($I(x^2) = \{2, 3, 4, 5\}$), ma duale non degenere ($y_2, y_3 \neq 0$).

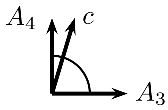
it. 3) $B = \{3, 4\}$, $y_3 > 0$, $y_4 > 0$ (in quanto c appartiene al cono generato da A_3 e A_4, cioè $c \in \text{cono}(A_3, A_4)$, come mostrato in figura (c)), quindi la base è duale ammissibile e l'algoritmo termina, avendo determinato la soluzione ottima primale x^3. La base è duale non degenere ($y_3, y_4 \neq 0$), ma è primale degenere ($I(x^3) = \{2, 3, 4, 5\}$).



(a)

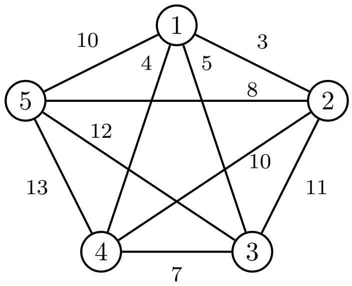


(b)



(c)

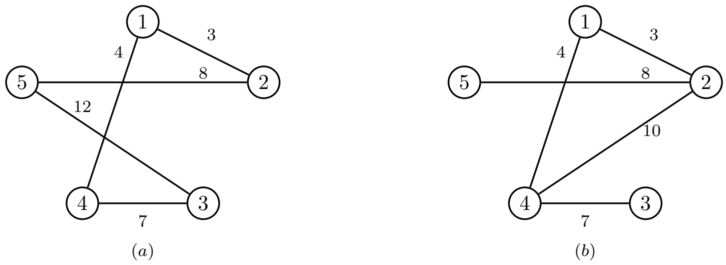
4) Si consideri il problema del ciclo hamiltoniano di costo minimo sul seguente grafo:



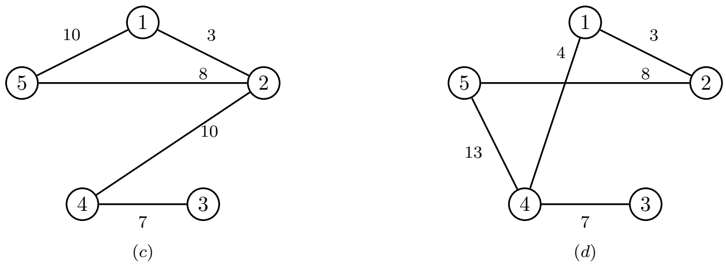
Si individui una soluzione ottima del problema utilizzando il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta risolvendo l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 5, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando l'1-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita istanziando nell'ordine le variabili x_{15}, x_{35}, x_{45}, e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

SVOLGIMENTO

L'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 5 fornisce la soluzione ammissibile di figura (a) di valore 34 che è una valutazione superiore del valore ottimo del problema, quindi $v_S(P) = 34$. L'1-albero di costo minimo è quello in figura (b) di valore 32 che è una valutazione inferiore del valore ottimo del problema, quindi $v_I(P) = 32$.



Iniziamo l'esplorazione dell'albero di enumerazione ramificando sulla variabile x_{15}. L'1-albero di costo minimo per P_1 è quello di figura (b) ed il nodo rimane aperto. L'1-albero di costo minimo per P_2 è quello di figura (c) di valore $38 = v_I(P_2)$. Poiché $v_I(P_2) > v_S(P)$, possiamo chiudere il nodo P_2.



Ramificando sulla variabile x_{35}, l'1-albero di costo minimo per P_3 è lo stesso di P (figura (b)) e non possiamo chiudere il nodo, mentre quello per P_4 è la soluzione ammissibile di figura (a) già individuata e possiamo chiudere il nodo. Ramificando sulla variabile x_{45}, notiamo che il problema P_5 non ammette cicli hamiltoniani in quanto sono vietati 3 dei 4 archi incidenti sul nodo 5, quindi possiamo quindi chiudere il nodo. L'1-albero di costo minimo per P_6 è indicato in figura (d) e ha valore $35 = v_I(P_6)$. Poiché $v_I(P_6) > v_S(P)$, possiamo chiudere anche il nodo P_6 e l'algoritmo termina individuando il ciclo hamiltoniano di costo minimo (a). La figura seguente riassume l'esplorazione dell'albero di enumerazione eseguita dall'algoritmo.