RICERCA OPERATIVA (a.a. 2019/20)

Nome Cognome: **Matricola:** **Corso:** A B

1) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & \alpha x_1 & + & \beta x_2 & & \\ & & & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

Utilizzando il teorema degli scarti complementari, si individuino tutte le coppie di valori dei parametri α e β per cui la soluzione $\bar{x} = (-1, 1)$ è ottima. Scelti $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Il problema duale è:

$$(D) \quad \begin{array}{rrcrcrcrcl} \min & y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & + & 2y_4 & & \\ & & & y_2 & + & 2y_3 & - & y_4 & = & \alpha \\ & y_1 & - & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = & \beta \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{x} = (-1, 1)$ è ammissibile per (P). L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \ldots, m\} : b_i - A_i\bar{x} = 0\} = \{1, 4\}$. Di conseguenza una soluzione duale $\bar{y}$ (per cui $\bar{y}A = c$) che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare le condizioni $\bar{y}_2 = \bar{y}_3 = 0$. Affinché $\bar{y}$ sia ammissibile per (D), essa deve soddisfare il seguente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} & - & y_4 & = & \alpha \\ y_1 & + & y_4 & = & \beta \\ y_1, & & y_4 & \geq & 0. \end{array} \right.$$

Pertanto, devono risultare $\bar{y}_1 = \alpha + \beta$, $\bar{y}_2 = -\alpha$ con $\alpha \leq 0$ e $\beta \geq -\alpha$. Conseguentemente, $\bar{x}$ è una soluzione ottima di (P) se e solo se $\alpha \leq 0$ e $\beta \geq -\alpha$, nel qual caso $\bar{y} = (\alpha + \beta, 0, 0, -\alpha)$ è l'unica soluzione ottima di (D).

Posti $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, $\bar{y} = (0, 0, 0, 1)$ è l'unica soluzione ottima di (D). L'insieme degli indici delle variabili duali positive è $J(\bar{y}) = \{j \in \{1, \ldots, m\} : \bar{y}_j > 0\} = \{4\}$. Di conseguenza, una soluzione primale $\hat{x}$ che formi con $\bar{y}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $b_4 - A_4\hat{x} = 0$, ovvero il quarto vincolo deve essere attivo e quindi deve risultare $\hat{x}_2 = \hat{x}_1 + 2$. Una tale soluzione è ammissibile per (P) se e solo se risolve il sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2 & \leq & 1 \\ x_1 - x_1 - 2 & \leq & 2 \\ 2x_1 + x_1 + 2 & \leq & 4 \end{array} \right.$$

ovvero se e solo se $\hat{x}_1 \leq -1$. L'insieme $X = \{(t, t+2) : t \leq -1\}$ individua tutte le soluzioni primali ammissibili complementari alla soluzione ottima $\bar{y}$ di (D), pertanto costituisce l'insieme delle soluzioni ottime di (P).

2) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & & & x_2 & & \\
& -2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
& & & x_2 & \leq & 4 \\
& -x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
& -x_1 & & & \leq & 0
\end{array}
$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante. Si discuta infine l'eventuale degenerazione delle soluzioni ottime primale e duale individuate. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{1, 4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$$y_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$h = \min\{i \in B : y_i < 0\} = 4, \quad B(h) = 2,$$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad J = \{i \in N : A_i \xi > 0\} = \{2, 3\},$$

$$\lambda_i = (b_i - A_i x)/A_i \xi, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad \bar{\lambda} = \min\{\lambda_i \ : \ i \in J\} = 0,$$

$$k = \min\{i \in J : \bar{\lambda} = \lambda_i\} = \min\{2, 3\} = 2 \text{ [cambio di base degenere]}$$

it.2) $B = \{1, 2\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$$y_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{STOP.}$$

$B = \{1, 2\}$ è una base ottima: $\bar{x} = (0, 4)$ è una soluzione ottima per il primale, mentre $\bar{y} = (0, 1, 0, 0)$ è una soluzione ottima per il duale. Le soluzioni sono entrambe degeneri, infatti si hanno $I(\bar{x}) = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\bar{y}_1 = 0$.

3) Calcolare un taglio di Gomory per il seguente problema di Programmazione Lineare Intera

$$\begin{array}{lrcrcr}
\max & -4x_1 & - & x_2 & & \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \geq & 11 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 7 \\
 & \multicolumn{5}{l}{x_1,\ x_2 \geq 0} \\
 & \multicolumn{5}{l}{x_1,\ x_2 \in \mathbb{Z}.}
\end{array}$$

SVOLGIMENTO

Risolvendo graficamente il rilassamento continuo si trova che la soluzione ottima è $(0, 11/2)$. Con l'aggiunta delle variabili di scarto il rilassamento continuo assume la forma

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\min & 4x_1 & + & x_2 & & & & & & \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 11 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & = & 7 \\
 & \multicolumn{9}{l}{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0.}
\end{array}$$

La soluzione ottima è $\bar{x} = (0, 11/2, 0, 4)$ e corrisponde alla base $B = \{2, 4\}$. Pertanto

$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_N = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{A} = A_B^{-1} A_N = \begin{bmatrix} 3/2 & 2 \\ -1/2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poiché la seconda componente di $\bar{x}$ è frazionaria, esiste un taglio di Gomory corrispondente all'indice $r = 2$, cioè

$$\left\{\frac{3}{2}\right\} x_1 + \left\{-\frac{1}{2}\right\} x_3 \geq \left\{\frac{11}{2}\right\}$$

che equivale a

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \geq \frac{1}{2}.$$

Dal primo vincolo si ricava $x_3 = 3x_1 + 2x_2 - 11$. Pertanto, il taglio di Gomory è equivalente a

$$2x_1 + x_2 \geq 6.$$

4) Si consideri il seguente problema dello zaino:

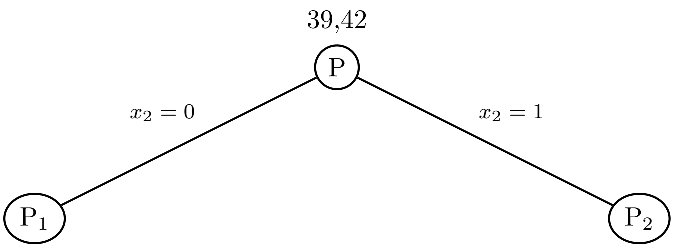
$$\begin{array}{rrcrcrcrcl} \max & 18x_1 & + & 22x_2 & + & 16x_3 & + & 23x_4 & & \\ & 5x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & \leq & 8 \\ & \multicolumn{8}{c}{x_1, \; x_2, \; x_3, \; x_4 \in \{0,1\}} \end{array}$$

Si individui una soluzione ottima del problema utilizzando il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo "greedy" basato sui rendimenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

SVOLGIMENTO

I rendimenti delle variabili x_1, x_2, x_3, x_4 sono rispettivamente $18/5 = 3+3/5$, $22/6 = 3+2/3$, $16/4 = 4$ e $23/3 = 7+2/3$. Per applicare l'algoritmo "greedy" basato sui rendimenti si analizzano le variabili in ordine decrescente di rendimento, cioè x_4, x_3, x_2, x_1: si ottiene la soluzione ammissibile $x = (0, 0, 1, 1)$ di valore 39 che è una valutazione inferiore del valore ottimo del problema, quindi $v_I(P) = 39$. Analizzando le variabili nello stesso ordine, si trova la soluzione ottima del rilassamento continuo $(0, 1/6, 1, 1)$ di valore 42+2/3, che è una valutazione superiore del valore ottimo del problema, quindi $v_S(P) = \lfloor 42 + 2/3 \rfloor = 42$.

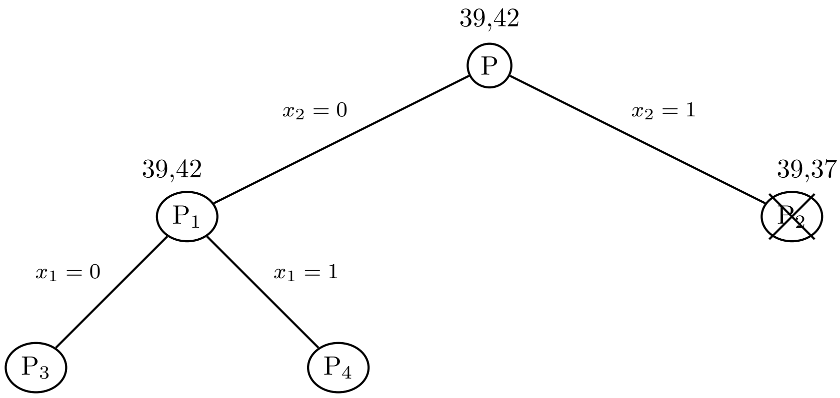
Iniziamo l'esplorazione dell'albero di enumerazione ramificando sulla variabile x_2:



La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_1 è $(1/5, 0, 1, 1)$ di valore $42+3/5$, quindi $v_S(P_1) = \lfloor 42+3/5 \rfloor = 42$. Poiché $v_S(P_1) > v_I(P)$ e la soluzione ottenuta non è ammissibile, il nodo P_1 rimane aperto.

La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_2 è $(0, 1, 0, 2/3)$ di valore $37+1/3$, quindi $v_S(P_2) = \lfloor 37+1/3 \rfloor = 37$. Poiché $v_S(P_2) < v_I(P)$, possiamo chiudere il nodo P_2.

Dal nodo P_1 ramifichiamo sulla variabile x_1:



La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_3 è $(0, 0, 1, 1)$ di valore $39 = v_S(P_3)$. Poiché $v_S(P_3) = v_I(P)$, possiamo chiudere il nodo P_3.

La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_4 è $(1, 0, 0, 1)$ di valore $41 = v_S(P_4)$. Poiché $v_S(P_4) > v_I(P)$ e la soluzione ottenuta è ammissibile, possiamo aggiornare $v_I(P) = 41$ e chiudere anche il nodo P4. Non essendoci altri nodi da esaminare, l'algoritmo termina.

La soluzione ottima del problema dello zaino è pertanto $(1, 0, 0, 1)$ di valore 41.