RICERCA OPERATIVA (a.a. 2018/19)

Nome Cognome:

Corso: A B **Matricola:**

1) La rete di intelligence *BuBuSettete* è costituita da n informatori e m agenti. Per garantire la sicurezza delle comunicazioni ciascun informatore i potrà interagire con un solo agente scelto nell'insieme $P(i) \subseteq \{1, 2, ..., m\}$ degli agenti di sua fiducia. I dati forniti settimanalmente dall'informatore i richiedono un tempo di elaborazione t_i e ciascun agente può può processarli soltanto in maniera sequenziale.

Si formuli in termini di P.L.I. il problema di assegnare gli informatori agli agenti, rispettando le preferenze degli informatori, in modo da minimizzare il tempo totale di elaborazione dell'agente con il maggior carico.

SVOLGIMENTO

Per descrivere il problema, introduciamo le seguenti variabili logiche:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se l'informatore } i \text{ è assegnato all'agente } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j \in P(i).$$

Ogni informatore i deve essere assegnato ad uno ed un solo agente nell'insieme $P(i)$; tale richiesta può essere espressa mediante i seguenti vincoli di semiassegnamento:

$$\sum_{j \in P(i)} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Il tempo di elaborazione richiesto all'agente j è dato dalla quantità:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i x_{ij}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Per formulare la funzione obiettivo, da minimizzare, dobbiamo esprimere il massimo tra questi tempi di elaborazione. A tal fine introduciamo una variabile ausiliaria T che ne rappresenta un'approssimazione per eccesso, e utilizziamo i seguenti vincoli di soglia:

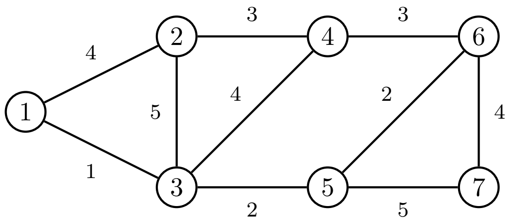
$$\sum_{i=1}^{n} t_i x_{ij} \leq T, \quad j = 1, \ldots, m.$$

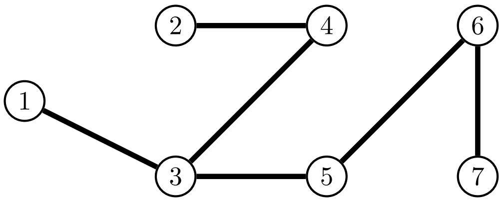
La formulazione del problema è quindi:

$$\begin{array}{lll} \min & T & \\ & \displaystyle\sum_{j \in P(i)} x_{ij} = 1 & i = 1, \ldots, n \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i x_{ij} \leq T & j = 1, \ldots, m \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1, \ldots, n, \quad j \in P(i) \end{array}$$

Quando il problema è risolto all'ottimo, la variabile ausiliaria T fornisce il tempo di elaborazione richiesto all'agente con il maggior carico, che sarà pertanto minimizzato.

2) Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul grafo di sinistra:





Dire se l'albero a destra è un albero di costo minimo utilizzando la caratterizzazione dell'ottimalità per cicli. Supponendo che i costi degli archi (3,4) e (4,6) siano rispettivamente α e β, dire per quali valori di α e β lo stesso albero è di costo minimo utilizzando la caratterizzazione dell'ottimalità per tagli. Giustificare tutte le risposte.

SVOLGIMENTO

Per ogni arco (i, j) non appartenente all'albero la tabella seguente riporta il suo costo, il ciclo P che si crea con la sua aggiunta all'albero, l'insieme P_{ij} degli altri archi del ciclo, i loro costi ed il massimo c_{max} di tali costi.

(i,j)	c_{ij}	P	P_{ij}	costi	c_{max}
$(1,2)$	4	$\{1,2,4,3\}$	$(2,4),(3,4),(1,3)$	$3,4,1$	4
$(2,3)$	5	$\{2,3,4\}$	$(3,4),(2,4)$	$4,3$	4
$(4,6)$	3	$\{4,6,5,3\}$	$(6,5),(3,5),(3,4)$	$2,2,4$	4
$(5,7)$	5	$\{5,7,6\}$	$(6,7),(5,6)$	$4,2$	4

L'albero non è di costo minimo in quanto il costo c_{ij} non è maggiore od uguale al corrispondente c_{max} per ogni arco (i, j) non appartenete all'albero. Infatti, l'arco $(4, 6)$ non è di costo massimo tra tutti gli archi del ciclo che si viene a creare aggiungendolo all'albero.

Per ogni arco (i, j) dell'albero la tabella seguente riporta il suo costo, il taglio (N', N'') che si crea con la sua rimozione dall'albero, l'insieme $A_{ij}(N', N'')$ degli altri archi nel taglio, i loro costi ed il minimo c_{min} di tali costi.

(i,j)	c_{ij}	(N',N'')	$A_{ij}(N',N'')$	costi	c_{min}
$(1,3)$	1	$(\{1\},\{2,3,4,5,6,7\})$	$(1,2)$	4	4
$(2,4)$	3	$(\{2\},\{1,3,4,5,6,7\})$	$(1,2),(2,3)$	$4,5$	4
$(3,4)$	α	$(\{2,4\},\{1,3,5,6,7\})$	$(1,2),(2,3),(4,6)$	$4,5,\beta$	$\min\{4,\beta\}$
$(3,5)$	2	$(\{1,2,3,4\},\{5,6,7\})$	$(4,6)$	β	β
$(5,6)$	2	$(\{1,2,3,4,5\},\{6,7\})$	$(4,6),(5,7)$	$\beta,5$	$\min\{\beta,5\}$
$(6,7)$	4	$(\{7\},\{1,2,3,4,5,6\})$	$(5,7)$	5	5

L'albero è di costo minimo se e solo se il costo c_{ij} è minore od uguale al corrispondente c_{min} per ogni arco (i, j) appartenente all'albero, pertanto se e solo se $\alpha \leq \min\{4, \beta\}$, $2 \leq \beta$ e $2 \leq \min\{\beta, 5\}$ che equivalgono a richiedere $\beta \geq 2$ e $\alpha \leq \min\{4, \beta\}$.

3) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & 2x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

Utilizzando gli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{x} = (1, 2)$ è ottima per il problema. Si individui inoltre l'insieme di tutte le direzioni ammissibili per $\bar{x}$. Ne esiste una che sia anche direzione di crescita? Giustificare tutte le risposte.

SVOLGIMENTO

Il problema duale è

$$(D) \qquad \begin{array}{rrcrcrcrcl} \min & 3y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & + & 2y_4 & & \\ & y_1 & + & y_2 & - & y_3 & & & = & 2 \\ & y_1 & - & 2y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = & 1 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0. \end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{x} = (1, 2)$ è ammissibile per (P). L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \ldots, m\} : b_i - A_i\bar{x} = 0\} = \{1, 3, 4\}$. Di conseguenza, una soluzione duale $\bar{y}$ (per cui $\bar{y}A = c$) che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $\bar{y}_2 = 0$. Affinché $\bar{y}$ sia ammissibile per (D), essa deve soddisfare il seguente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} y_1 & - & y_3 & & & = & 2 \\ y_1 & + & y_3 & + & y_4 & = & 1 \\ y_1, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0. \end{array} \right.$$

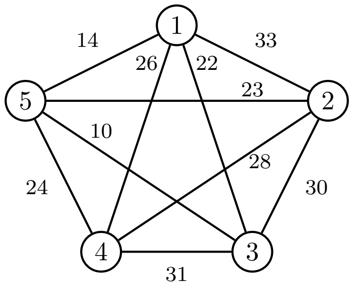
Posto $y_3 = \lambda$, il sistema di equazioni ammette infinite soluzioni della forma $(2 + \lambda, \lambda, -1 - 2\lambda)$. Le prime due componenti di tali soluzioni sono entrambe non negative per $\lambda \geq 0$ mentre la terza è non negativa per $\lambda \leq -1/2$. Pertanto, comunque si scelga λ, la soluzione $\bar{y}(\lambda) = (2+\lambda, 0, \lambda, -1-2\lambda)$ non è ammissibile per (D). Poiché tutte le soluzioni duali complementari a $\bar{x}$ non sono ammissibili, il teorema degli scarti complementari e le sue conseguenze garantiscono che $\bar{x}$ non è una soluzione ottima per (P).

Le direzioni ammissibili per $\bar{x}$ sono individuate da tutti e soli i vettori $\xi \in \mathbb{R}^2$ tali che $A_{I(\bar{x})}\xi \leq 0$, ovvero che soddisfano il seguente sistema di disequazioni

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \xi_1 & + & \xi_2 & \leq & 0 \\ -\xi_1 & + & \xi_2 & \leq & 0 \\ & & \xi_2 & \leq & 0. \end{array} \right.$$

Pertanto, l'insieme delle direzioni ammissibili per $\bar{x}$ è $C(\bar{x}) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \ : \ \xi_2 \leq 0, \ \xi_1 \leq |\xi_2|\}$. Poiché $\bar{x}$ non è soluzione ottima, questo insieme deve contenere una direzione che sia anche di crescita. Ad esempio, $\xi = (1, -1) \in C(\bar{x})$ soddisfa la condizione di crescita in quanto $c\xi = 1 > 0$.

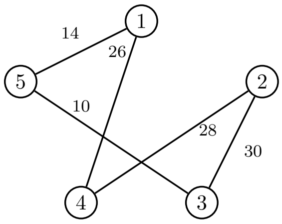
4) Si consideri il problema del ciclo hamiltoniano di costo minimo sul seguente grafo:



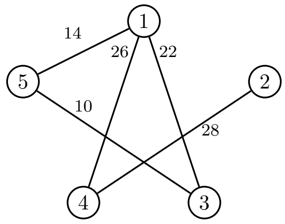
Si individui una soluzione ottima del problema utilizzando il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta risolvendo l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando il 5-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita istanziando nell'ordine le variabili x_{35}, x_{15}, x_{13}, e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

SVOLGIMENTO

L'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3 fornisce la soluzione ammissibile di figura (a) di valore 108 che è una valutazione superiore del valore ottimo del problema, quindi $v_S(P) = 108$. Il 5-albero di costo minimo è quello in figura (b) di valore 100 che è una valutazione inferiore del valore ottimo del problema, quindi $v_I(P) = 100$.

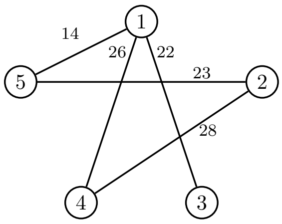


(a)

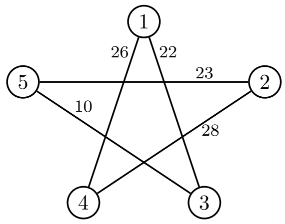


(b)

Iniziamo l'esplorazione dell'albero di enumerazione ramificando sulla variabile x_{35}. Il 5-albero di costo minimo per P_1 è quello di figura (c) di valore $113 = v_I(P_1)$. Poiché $v_I(P_1) > v_S(P)$, possiamo chiudere il nodo P_1.



(c)



(d)

Il 5-albero di costo minimo per P_2 è quello di figura (b) ed il nodo rimane aperto. Ramificando sulla variabile x_{15}, il 5-albero di costo minimo per P_3 è la soluzione ammissibile di figura (d) di valore 109 e possiamo chiudere il nodo poiché $v_I(P_3) = 109 > v_S(P)$, mentre quello per P_4 è lo stesso di P (figura (b)) e non possiamo chiudere il nodo. Ramificando sulla variabile x_{13}, il 5-albero di costo minimo per P_5 è la soluzione ammissibile di figura (a) già individuata di valore 108 e quindi possiamo chiudere il nodo. Poiché il problema P_6 non ammette cicli hamiltoniani in quanto si viene a creare il ciclo $\{1, 3, 5\}$, possiamo chiudere il nodo P_6 e l'algoritmo termina individuando il ciclo hamiltoniano di costo minimo di figura (a). La figura seguente riassume l'esplorazione dell'albero di enumerazione eseguita dall'algoritmo.