RICERCA OPERATIVA (a.a. 2018/19)

Nome Cognome:

Corso: A B **Matricola:**

1) Gli n conferenzieri di un convegno scientifico alle Hawaii devono essere portati in tour presso un'isola dell'arcipelago. Per il trasbordo sono disponibili m barche. Sia u_j il massimo numero di passeggeri imbarcabili sulla barca j. Le imbarcazioni a disposizione differiscono non solo in termini di capacità, ma anche come servizi offerti a bordo. Ogni conferenziere segnala quindi su quali barche gradirebbe essere imbarcato. Noto il peso p_i di ciascun conferenziere i, per garantire un'equa distribuzione del carico, l'organizzatore del tour decide di ripartire i conferenzieri tra le barche in modo da minimizzare il massimo carico di tutte le barche, considerando come carico di una barca esclusivamente il peso dei passeggeri imbarcati.

Si formuli in termini di P.L.I. il problema di ripartire i conferenzieri tra le barche, rispettando le preferenze dei conferenzieri e soddisfacendo i vincoli di capacità, in modo da minimizzare il massimo carico di tutte le barche *(suggerimento: utilizzare una matrice di dati per rappresentare le preferenze dei conferenzieri).*

SVOLGIMENTO

Per descrivere il problema, introduciamo le seguenti variabili logiche

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il conferenziere } i \text{ viene imbarcato sulla barca } j \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, m$$

e la seguente matrice di dati per esprimere le preferenze dei conferenzieri

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il conferenziere } i \text{ gradisce la barca } j \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, m.$$

Per garantire che ogni conferenziere sia imbarcato rispettando le preferenze espresse, introduciamo i seguenti vincoli di semiassegnamento:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Per garantire che il numero di passeggeri imbarcati su ogni barca non ecceda il limite associato all'imbarcazione stessa, introduciamo i seguenti vincoli di capacità:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \le u_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Volendo minimizzare il carico della barca più carica, definiamo una variabile di soglia z ed introduciamo i vincoli

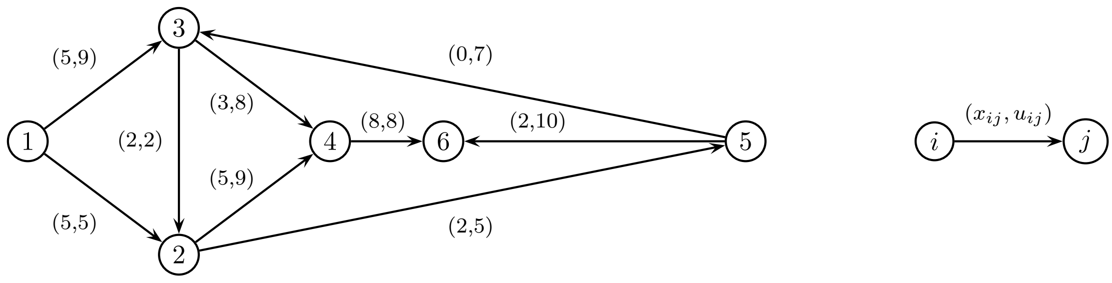
$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} x_{ij} \le z, \quad j = 1, \dots, m,$$

cosicché z individua un'approssimazione superiore del massimo carico delle barche.

La formulazione del problema è quindi:

$$\begin{array}{ll} \min & z \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \dots, n \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \le u_j \qquad j = 1, \dots, m \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} x_{ij} \le z \qquad j = 1, \dots, m \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, m. \end{array}$$

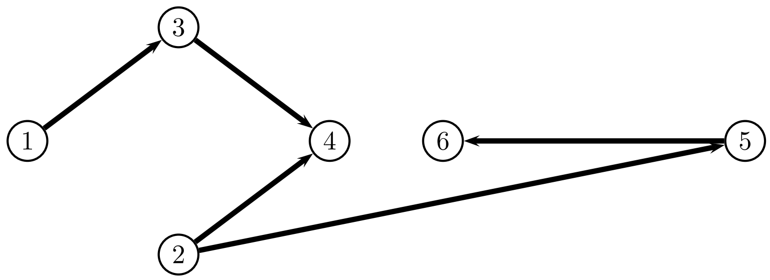
2) Si consideri il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sul grafo seguente:



Dire se il flusso riportato in figura è massimo. Qualora non lo fosse, applicare un algoritmo per trovare un flusso massimo ed un taglio di capacità minima. Il taglio individuato è l'unico di capacità minima? Giustificare tutte le risposte.

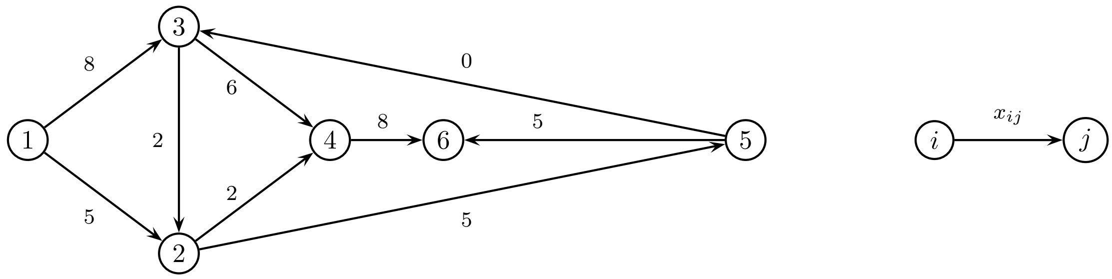
SVOLGIMENTO

Il flusso dato è massimo se e solo se non ammette cammini aumentanti. La visita restituisce l'albero riportato in figura

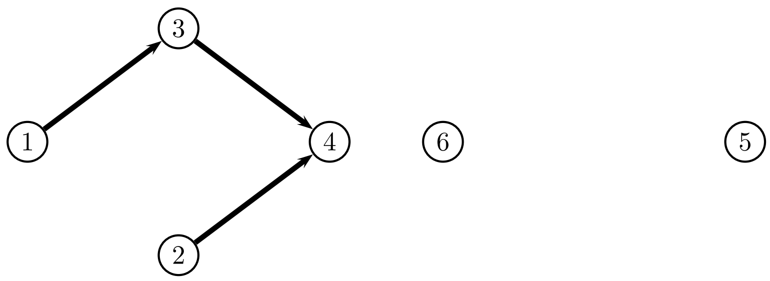


che coincide con il cammino aumentante $P = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ di capacità $\theta = \min\{4, 5, 5, 3, 8\} = 3$. Pertanto, il flusso non è massimo.

A partire dal flusso dato si può applicare l'algoritmo di Edmonds-Karp, che alla prima iterazione restituisce il cammino P sopra riportato. Inviando θ unità di flusso lungo questo cammino si ottiene il flusso di valore $v = 13$ riportato nella figura sottostante.



La visita associata a questo nuovo flusso restituisce



Non esistendo cammini aumentanti, il flusso ottenuto è massimo ed inoltre il taglio $(\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\})$ è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = u_{25} + u_{46} = 5 + 8 = 13$.

Cambiando verso a tutti gli archi, il flusso individuato rimane massimo anche dal nodo 6 al nodo 1. La visita associata a questo flusso resituisce anch'essa il taglio $(\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\})$. Pertanto, il taglio individuato è l'unico taglio di capacità minima.

3) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\max & x_1 & + & (1-\gamma)x_2 & - & \gamma x_3 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 5 \\
 & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 1 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 4 \\
 & & & x_2 & - & x_3 & \leq & 3 \\
 & x_1 & & & + & x_3 & \leq & 6 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & \leq & 2
\end{array}$$

Si determinino i valori del parametro γ per i quali $\hat{x} = (0,0,0)$ è una soluzione ottima del problema e quelli per cui $\bar{x} = (1,1,-1)$ è una soluzione ottima. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

È immediato verificare che entrambe le soluzioni sono ammissibili.

Poiché nessun vincolo è attivo in $\hat{x}$, cioè $I(\hat{x}) = \{i \in \{1,\dots,m\} : b_i - A_i\hat{x} = 0\} = \emptyset$, la soluzione è un punto interno della regione ammissibile. Inoltre, il vettore dei coefficienti dei costi non è il vettore zero quale che sia il valore del parametro γ. Pertanto, $\hat{x}$ non può essere soluzione ottima del problema dato per qualsiasi valore di γ.

Diversamente, l'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è non vuoto: $I(\bar{x}) = \{3,6\}$. Il problema duale è:

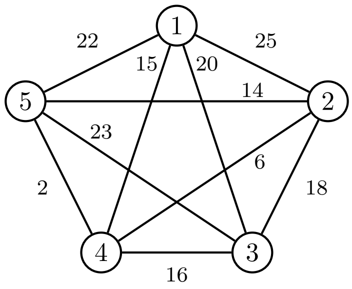
$$(D)\quad \begin{array}{rrcrcrcrcrcrcl}
\min & 5y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & + & 3y_4 & + & 6y_5 & + & 2y_6 & & \\
 & y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & & & + & y_5 & + & y_6 & = & 1 \\
 & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & & & + & y_6 & = & 1-\gamma \\
 & -y_1 & + & 2y_2 & - & y_3 & - & y_4 & + & y_5 & & & = & -\gamma \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5, & & y_6 & \geq & 0.
\end{array}$$

Una soluzione duale $\bar{y}$ (per cui $\bar{y}A = c$) che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare le condizioni $\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = \bar{y}_4 = \bar{y}_5 = 0$. Affinché $\bar{y}$ sia ammissibile per (D), essa deve soddisfare il seguente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcl}
2y_3 & + & y_6 & = & 1 \\
y_3 & + & y_6 & = & 1-\gamma \\
-y_3 & & & = & -\gamma \\
y_3, & & y_6 & \geq & 0
\end{array}\right.$$

che ammette come unica soluzione $(y_3, y_6) = (\gamma, 1-2\gamma)$. Tale soluzione ha componenti non negative quando $0 \leq \gamma \leq 1/2$. Quindi il sistema ammette una soluzione se e solo se il parametro γ appartiene all'intervallo $[0,1/2]$. Di conseguenza, $\bar{x}$ è una soluzione ottima se e solo se $\gamma \in [0,1/2]$.

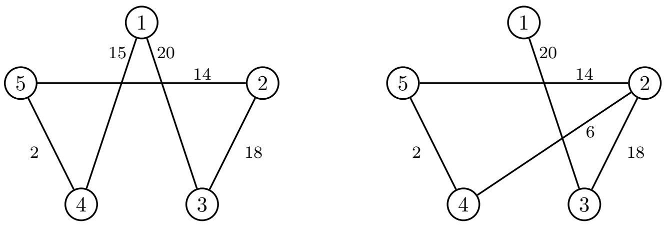
4) Si consideri il problema del ciclo hamiltoniano di costo minimo sul seguente grafo:



Si individui una soluzione ottima del problema utilizzando il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta risolvendo l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando il 4-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita istanziando nell'ordine le variabili x_{45}, x_{24}, x_{25}, e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

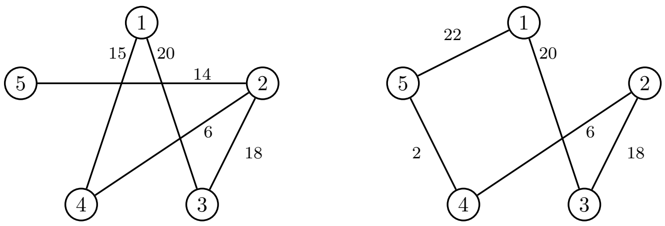
SVOLGIMENTO

L'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1 fornisce la soluzione ammissibile di figura (a) di valore 69 che è una valutazione superiore del valore ottimo del problema, quindi $v_S(P) = 69$. Il 4-albero di costo minimo è quello in figura (b) di valore 60 che è una valutazione inferiore del valore ottimo del problema, quindi $v_I(P) = 60$.



(a) (b)

Iniziamo l'esplorazione dell'albero di enumerazione ramificando sulla variabile x_{45}. Il 4-albero di costo minimo per P_1 è quello di figura (c) di valore $73 = v_I(P_1)$. Poiché $v_I(P_1) > v_S(P)$, possiamo chiudere il nodo P_1.



(c) (d)

Il 4-albero di costo minimo per P_2 è quello di figura (b) ed il nodo rimane aperto. Ramificando sulla variabile x_{24}, il 4-albero di costo minimo per P_3 è la soluzione ammissibile di figura (a) già individuata e possiamo chiudere il nodo, mentre quello per P_4 è lo stesso di P (figura (b)) e non possiamo chiudere il nodo. Ramificando sulla variabile x_{25}, il 4-albero di costo minimo associato per P_5 è la soluzione ammissibile di figura (d) di valore $68 = v_I(P_5)$. Poiché $v_I(P_5) < v_S(P)$, si aggiorna la soluzione ammissibile con $v_S(P) = 68$ e possiamo chiudere il nodo. Poiché il problema P_6 non ammette cicli hamiltoniani in quanto si viene a creare il ciclo $(2, 4, 5)$, possiamo chiudere il nodo P_6 e l'algoritmo termina individuando il ciclo hamiltoniano di costo minimo (d). La figura seguente riassume l'esplorazione dell'albero di enumerazione eseguita dall'algoritmo.