RICERCA OPERATIVA (a.a. 2018/19)

Nome Cognome:

Corso: A B **Matricola:**

1) La direzione marketing della finanziaria *PonziGonzi* decide di aprire p filiali per servire n clienti. Il volume di lavoro portato dal cliente i richiede mensilmente d_i ore di lavoro, mentre la filiale j ha una capacità lavorativa di u_j ore mensili. Il Consiglio di Amministrazione della *PonziGonzi* ritiene che una filiale sia profittevole se il numero di ore lavorate mensilmente a servizio dei suoi clienti sia almeno il 70% della capacità lavorativa della filiale stessa.

Si aiuti la direzione marketing a stabilire un piano di servizio, formulando in termini di P.L.I. il problema di assegnare ciascun cliente ad una ed una sola filiale in modo da massimizzare il numero delle filiali profittevoli.

SVOLGIMENTO

Introduciamo le seguenti np variabili logiche:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il cliente } i \text{ è assegnato alla filiale } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, p.$$

I vincoli di semiassegnamento, che garantiscono che ogni cliente sia assegnato ad una ed una sola filiale, sono:

$$\sum_{j=1}^{p} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Introduciamo inoltre p variabili logiche per contare le filiali profittevoli:

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se la filiale } j \text{ lavora per i suoi clienti almeno il 70\% di } u_j \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad j = 1, \dots, p.$$

Devono essere rispettati i seguenti vincoli di capacità:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i x_{ij} \le u_j, \qquad j = 1, \dots, p,$$

mentre i seguenti vincoli permettono di individuarle le filiali profittevoli:

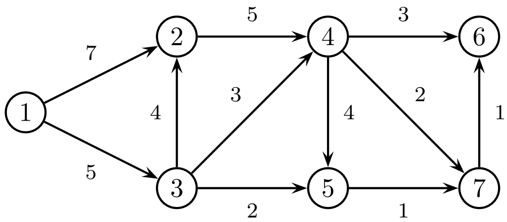
$$\sum_{i=1}^{n} d_i x_{ij} \ge 0.7\ u_j y_j, \qquad j = 1, \dots, p.$$

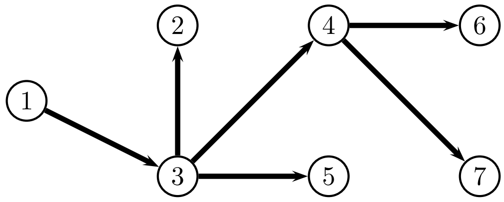
La funzione obiettivo, da massimizzare, è data dal numero di filiali profittevoli: $\sum_{j=1}^{p} y_j$.

La formulazione del problema è quindi

$$\begin{array}{lrcll} \max & \sum_{j=1}^{p} y_j & & & \\ & \sum_{j=1}^{p} x_{ij} & = & 1 & i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^{n} d_i x_{ij} & \le & u_j & j = 1, \dots, p \\ & \sum_{i=1}^{n} d_i x_{ij} & \ge & 0.7\ u_j y_j & j = 1, \dots, p \\ & x_{ij} & \in & \{0,1\} & i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p \\ & y_j & \in & \{0,1\} & j = 1, \dots, p \end{array}$$

2) Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo di sinistra:





Dire se l'albero sulla destra è un albero dei cammini minimi. Cambiando il costo dell'arco $(1, 2)$ da 7 a 10, trovare un albero dei cammini minimi di radice 1 applicando eventualmente un algoritmo opportuno. L'albero così individuato è l'unico albero dei cammini minimi? Giustificare tutte le risposte.

SVOLGIMENTO

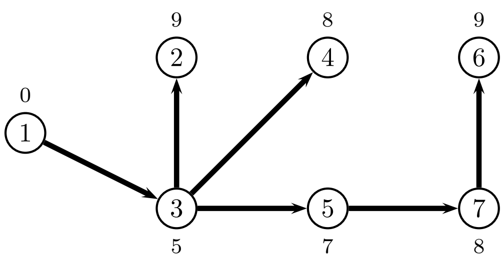
Il vettore di etichette associato all'albero dato è $d = (0, 9, 5, 8, 7, 11, 10)$. La seguente tabella mostra che alcuni degli archi (i, j) non appartenenti all'albero non soddisfano le condizioni di Bellman $d_i + c_{ij} \geq d_j$. Pertanto, l'albero dato non è un albero dei cammini minimi.

(i,j)	$d_i + c_{ij}$	d_j
$(1,2)$	$0+7$	9
$(2,4)$	$9+5$	8
$(4,5)$	$8+4$	7
$(5,7)$	$7+1$	10
$(7,6)$	$10+1$	11

Cambiando il costo dell'arco $(1, 2)$ da 7 a 10, l'arco $(1, 2)$ adesso soddisfa la corrispondente condizione di Bellman ma l'arco $(5, 7)$ non la soddisfa comunque. Pertanto, l'albero dato continua a non essere un albero dei cammini minimi. Per trovarne uno, è possibile applicare l'algoritmo di Dijkstra a partire da tale albero insieme alle corrispondenti etichette d e all'insieme $Q = \{5\}$ che contiene l'unico nodo coda di archi che non soddisfano le condizioni di Bellman. Per ciascuna iterazione dell'algoritmo la tabella riporta il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette e l'insieme dei nodi candidati Q al termine dell'iterazione.

it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	Q
0		–	3	1	3	3	4	7	0	9	5	8	7	11	10	$\{5\}$
1	5	–	3	1	3	3	4	5	0	9	5	8	7	11	8	$\{7\}$
2	7	–	3	1	3	3	7	5	0	9	5	8	7	9	8	$\{6\}$
3	6	–	3	1	3	3	7	5	0	9	5	8	7	9	8	$\emptyset$

L'albero così individuato è illustrato in figura, riportando i costi dei cammini ottimi (etichette finali dei nodi).



Poiché nessun soddisfa la condizione di Bellman come uguaglianza, l'albero è l'unico albero dei cammini minimi.

3) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & x_1 & & & & \\
 & & - & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & & & \leq & 0 \\
 & -x_1 & & & \leq & -3
\end{array}
$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{2, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h. Modificare il termine noto di un solo vincolo in modo tale che la soluzione $\bar{x} = (0, 2)$ risulti essere una soluzione ottima del problema. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

$$
\text{it. 1) } B = \{2,3\}: \quad A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},
$$

$$
\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad k = \min\{4, 5\} = 4 \text{ [regola anticiclo di Bland]},
$$

$$
\eta_B = A_k A_B^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix},
$$

$$
\bar{\theta} = \min\{1, 1\} = 1, \ h = \min\{2, 3\} = 2 \text{ [regola anticiclo di Bland]}.
$$

$$
\text{it. 2) } B = \{3,4\}: \quad A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},
$$

$$
\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad k = 5, \quad \eta_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{STOP.}
$$

Poiché $\eta_B \leq 0$, il problema duale è inferiormente illimitato ed il problema primale è vuoto.

La soluzione $\bar{x}$ è ovviamente non ammissibile in quanto il problema dato non ammette soluzione ammissibili. In effetti, $\bar{x}$ soddisfa i primi quattro vincoli ma non l'ultimo e pertanto è necessario cambiare il suo termine noto. Indicato con γ il generico valore di questo termine, il vincolo, $-x_1 \leq \gamma$ è soddisfatto da $\bar{x}$ se e solo se $\gamma \geq 0$. Inoltre, $\bar{x}$ è una soluzione di base in quanto $\{3, 4\} \subseteq I(\bar{x})$. Alla base $B = \{3, 4\}$ corrispondono la soluzione primale $\bar{x}$ e la soluzione duale ammissibile $\bar{y} = (0, 0, 0, 1, 0)$. Poiché una coppia di soluzioni di base soddisfa sempre la condizione degli scarti complementari, $\bar{x}$ è ottima qualora sia ammissibile, ovvero se $\gamma \geq 0$.

4) Calcolare un taglio di Gomory per il seguente problema di Programmazione Lineare Intera:

$$\begin{array}{llcllcl}\max & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ & 2x_1 & + & 2x_2 & \leq & 21 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 16 \\ & \multicolumn{5}{l}{x_1,\ x_2 \geq 0} \\ & \multicolumn{5}{l}{x_1,\ x_2 \in \mathbb{Z}.}\end{array}$$

SVOLGIMENTO

Risolvendo graficamente il rilassamento continuo si trova che la soluzione ottima è $(11/2, 5)$. Il rilassamento continuo con l'aggiunta delle variabili di scarto assume la forma

$$\begin{array}{llclclclcl}\max & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & \\ & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 21 \\ & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 16 \\ & \multicolumn{9}{l}{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0}\end{array}$$

La soluzione ottima è $(11/2, 5, 0, 0)$ e corrisponde alla base $B = \{1, 2\}$. Pertanto

$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \tilde{A} = A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Poiché solo la prima componente di $\bar{x}$ è frazionaria, esiste un solo taglio di Gomory corrispondente all'indice $r = 1$:

$$\left\{-\frac{1}{2}\right\} x_3 + \{1\}\, x_4 \geq \left\{\frac{11}{2}\right\}$$

che equivale a

$$\frac{1}{2} x_3 \geq \frac{1}{2}.$$

Dal primo vincolo si ricava che $x_3 = 21 - 2x_1 - 2x_2$, pertanto il taglio di Gomory è equivalente a

$$21 - 2x_1 - 2x_2 \geq 1$$

cioè

$$x_1 + x_2 \leq 10.$$