RICERCA OPERATIVA (a.a. 2018/19)

Nome Cognome:

Corso: A B **Matricola:**

1) L'emergente network *Radio Maya the Bee* vuole estendere le proprie trasmissioni radiofoniche ad una nuova regione dove contrastare il dominio della popolarissima *Radio Tecla Spider*. Per far ciò può ottenere in concessione frequenze FM negli n distretti della regione. Per ogni distretto i si conosce l'insieme $F(i)$ delle frequenze disponibili, il canone annuale c_{ij} di concessione per ciascuna frequenza $j \in F(i)$ ed una stima r_i del numero di potenziali radioascoltatori che sarebbero disponibili ad abbandonare Radio Tecla Spider.

Sapendo che il budget annuale a disposizione per questa operazione espansiva è U, si formuli in termini di P.L.I. il problema di stabilire in quali distretti trasmettere e quali frequenze richiedere allo scopo di massimizzare il numero totale di potenziali radioascoltatori da strappare all'emittente rivale.

SVOLGIMENTO

Introduciamo le variabili logiche

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se il network trasmette nel distretto } i \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n,$$

e

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il network richiede in concessione la frequenza } j \text{ nel distretto } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j \in F(i).$$

Il numero totale di potenziali radioascoltatori è:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i y_i.$$

Il costo complessivo dei canoni di concessione non deve superare il budget a disposizione:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in F(i)} c_{ij} x_{ij} \leq U.$$

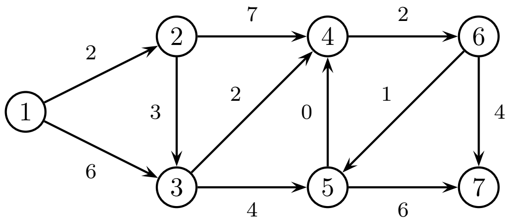
Il network non può trasmettere nei distretti in cui non ha richiesto alcuna frequenza:

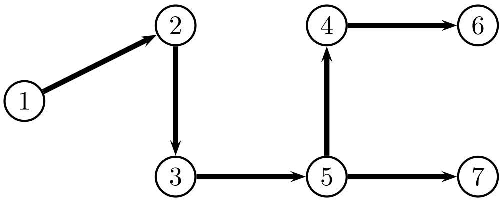
$$y_i \leq \sum_{j \in F(i)} x_{ij} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

La formulazione in termini di P.L.I. è pertanto:

$$\begin{array}{lll} \max & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} r_i y_i & \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in F(i)} c_{ij} x_{ij} \leq U & \\ & \displaystyle y_i \sum_{j \in F(i)} x_{ij} & i = 1, ..., n \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1, ...n \quad j \in F(i) \\ & y_i \in \{0, 1\} & i = 1, ...n \end{array}$$

2) Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo di sinistra:





Dire se l'albero sulla destra è un albero dei cammini minimi. Cambiando il costo dell'arco $(6, 7)$ da 4 a 3, trovare un albero dei cammini minimi di radice 1 applicando eventualmente un algoritmo opportuno. L'albero così individuato è l'unico albero dei cammini minimi? Giustificare tutte le risposte.

SVOLGIMENTO

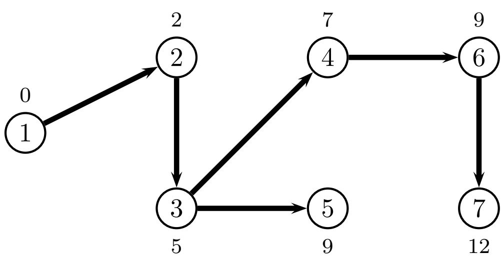
Il vettore di etichette associato all'albero dato è $d = (0, 2, 5, 9, 9, 11, 15)$. La seguente tabella mostra che non tutti gli archi (i, j) non appartenenti all'albero soddisfano le condizioni di Bellman $d_i + c_{ij} \geq d_j$. Pertanto, l'albero dato non è un albero dei cammini minimi.

(i,j)	$d_i + c_{ij}$	d_j
$(1,3)$	$0+6$	5
$(2,4)$	$2+7$	9
$(3,4)$	$5+2$	9
$(6,5)$	$11+1$	9
$(6,7)$	$11+4$	15

Cambiando il costo dell'arco $(6, 7)$ da 4 a 3, anche l'arco $(6, 7)$ non soddisfa più la corrispondente condizione di Bellman. Per trovare un albero dei cammini minimi, è possibile applicare l'algoritmo di Dijkstra a partire dall'albero dato insieme alle corrispondenti etichette d e all'insieme $Q = \{3, 6\}$ che contiene tutti i nodi coda di archi che non soddisfano le condizioni di Bellman. Per ciascuna iterazione dell'algoritmo la tabella riporta il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette e l'insieme dei nodi candidati Q al termine dell'iterazione.

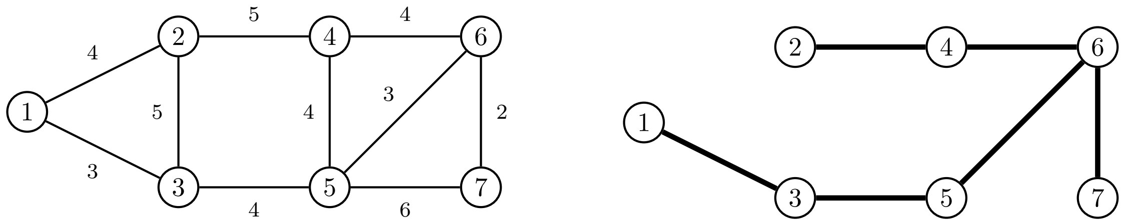
it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	Q
0		–	1	2	5	3	4	5	0	2	5	9	9	11	15	$\{3,6\}$
1	3	–	1	2	3	3	4	5	0	2	5	7	9	11	15	$\{4,6\}$
2	4	–	1	2	3	3	4	5	0	2	5	7	9	9	15	$\{6\}$
3	6	–	1	2	3	3	4	6	0	2	5	7	9	9	12	$\{7\}$
4	7	–	1	2	3	3	4	6	0	2	5	7	9	9	12	$\emptyset$

L'albero così individuato è illustrato in figura, riportando i costi dei cammini ottimi (etichette finali dei nodi).



Poiché nessun arco soddisfa le condizioni di Bellman come uguaglianza, l'albero è l'unico albero dei cammini minimi.

3) Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul grafo di sinistra:



Dire se l'albero a destra è un albero di costo minimo utilizzando la caratterizzazione dell'ottimalità per tagli. Supponendo che i costi degli archi (1,2) e (2,4) siano rispettivamente α e β, dire per quali valori di α e β lo stesso albero è di costo minimo utilizzando la caratterizzazione dell'ottimalità per cicli. Giustificare tutte le risposte.

SVOLGIMENTO

Per ogni arco (i,j) dell'albero la tabella seguente riporta il suo costo, il taglio (N', N'') che si crea con la sua rimozione dall'albero, l'insieme $A_{ij}(N', N'')$ degli altri archi nel taglio, i loro costi ed il minimo c_{min} di tali costi.

(i,j)	c_{ij}	(N', N'')	$A_{ij}(N', N'')$	costi	c_{min}
$(1,3)$	3	$(\{1\}, \{2,3,4,5,6,7\})$	$(1,2)$	4	4
$(2,4)$	5	$(\{2\}, \{1,3,4,5,6,7\})$	$(1,2)(2,3)$	$4,5$	4
$(3,5)$	4	$(\{1,3\}, \{2,4,5,6,7\})$	$(1,2)(2,3)$	$4,5$	4
$(4,6)$	4	$(\{2,4\}, \{1,3,5,6,7\})$	$(1,2),(2,3),(4,5)$	$4,5,4$	4
$(5,6)$	3	$(\{1,3,5\}, \{2,4,6,7\})$	$(1,2),(2,3),(4,5),(5,7)$	$4,5,4,6$	4
$(6,7)$	2	$(\{7\}, \{1,2,3,4,5,6\})$	$(5,7)$	6	6

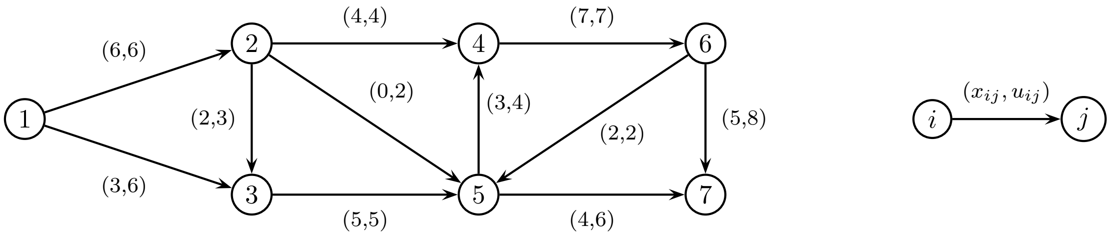
L'albero non è di costo minimo in quanto il costo c_{ij} è maggiore del corrispondente c_{min} per l'archi $(2,4)$.

Per ogni arco (i,j) non appartenente all'albero la tabella seguente riporta il suo costo, il ciclo P che si crea con la sua aggiunta all'albero, l'insieme P_{ij} degli altri archi del ciclo, i loro costi ed il massimo c_{max} di tali costi.

(i,j)	c_{ij}	P	P_{ij}	costi	c_{max}
$(1,2)$	α	$\{1,2,4,6,5,3\}$	$(2,4),(4,6),(5,6),(3,5),(1,3)$	$\beta,4,3,4,3$	$\max\{4,\beta\}$
$(2,3)$	5	$\{2,3,5,6,4\}$	$(3,5),(5,6),(4,6),(2,4)$	$4,3,4,\beta$	$\max\{4,\beta\}$
$(4,5)$	4	$\{4,5,6\}$	$(5,6),(4,6)$	$3,4$	4
$(5,7)$	6	$\{5,7,6\}$	$(6,7),(5,6)$	$2,3$	3

L'albero è di costo minimo se e solo se il costo c_{ij} è maggiore od uguale al corrispondente c_{max} per ogni arco (i,j) non appartenete all'albero, pertanto se e solo se $\alpha \geq \max\{4, \beta\}$ e $\beta \leq 5$.

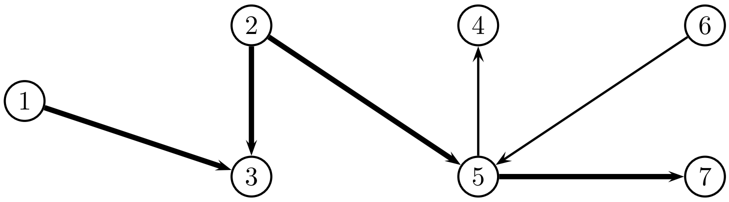
4) Si consideri il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7 sul grafo seguente:



Dire se il flusso riportato in figura è massimo. Qualora non lo fosse, applicare un algoritmo per trovare un flusso massimo ed un taglio di capacità minima. Il taglio così individuato è l'unico taglio di capacità minima? Giustificare tutte le risposte.

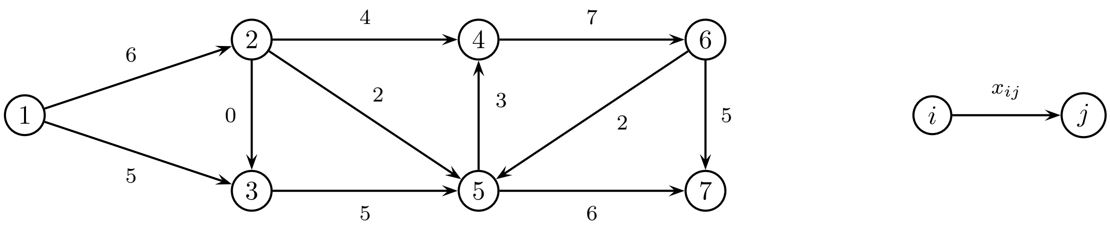
SVOLGIMENTO

Il flusso dato è massimo se e solo se non ammette cammini aumentanti. La visita restituisce l'albero riportato in figura

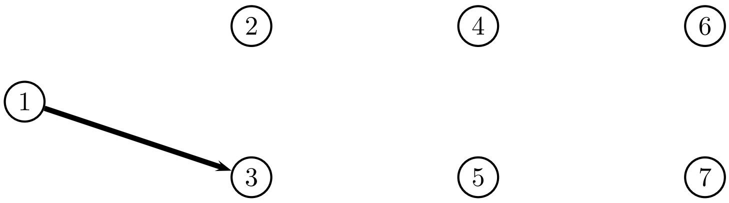


che contiene il cammino aumentante $P = \{1, 3, 2, 5, 7\}$ di capacità $\theta = \min\{3, 2, 2, 2\} = 2$. Pertanto, il flusso non è massimo.

A partire dal flusso dato si può applicare l'algoritmo di Edmonds-Karp, che alla prima iterazione restituisce il cammino P sopra riportato. Inviando θ unità di flusso lungo questo cammino si ottiene il flusso di valore $v = 11$ riportato nella figura sottostante.

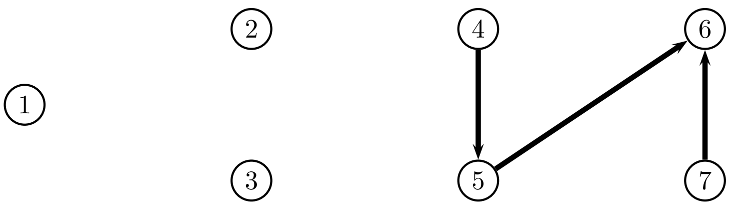


La visita associata a questo nuovo flusso restituisce



Non esistendo cammini aumentanti, il flusso ottenuto è massimo ed inoltre il taglio $(\{1, 3\}, \{2, 4, 5, 6, 7\})$ è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = u_{12} + u_{35} = 6 + 5 = 11$.

Questo taglio non è l'unico taglio di capacità minima: il flusso ottenuto è massimo anche dal nodo 7 al nodo 1 nel grafo in cui il verso di tutti gli archi è invertito ed in questo grafo la visita associata al flusso restituisce



che permette di individuare il taglio $(\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 7\})$ anch'esso di capacità minima. Ad ulteriore conferma risulta infatti $u(N_s, N_t) = u_{24} + u_{25} + u_{35} = 4 + 2 + 5 = 11$.