RICERCA OPERATIVA (a.a. 2022/23)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda *a*) (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande *b*), *c*), *d*) e si risponda alla domanda finale *e*).

1) I venti di guerra con l'*Impero Klingon* hanno spinto il governo della *Federazione dei Pianeti Uniti* a stanziare C crediti federali per la realizzazione di basi di intercettazione spaziale a protezione degli n pianeti ritenuti più esposti al rischio di attacchi. I tecnici dell'*Ammiraglio Bill*, comandante supremo della *Flotta Astrale*, hanno individuato m satelliti artificiali idonei ad ospitare le basi. Le tecnologie più avanzate disponibili permettono ad una base di proteggere un pianeta distante al più D^+ secondi-luce. Una base sul satellite j sarebbe in grado di proteggerne fino a p_j, il costo della sua realizzazione ammonta a c_j crediti federali mentre le attrezzature necessarie alla protezione del pianeta i costano v_i crediti e la distanza massima del satellite j dal pianeta i è d_{ij} secondi-luce.

Aiuta l'ammiraglio ad elaborare un piano di costruzione delle basi e protezione dei pianeti: si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere su quali satelliti costruire basi e quali pianeti proteggere da ciascuna di esse nel rispetto dello stanziamento assegnato e dei vincoli tecnologici realizzando al più k basi con l'obiettivo di massimizzare il numero di pianeti protetti ma garantendo comunque la presenza di una base a distanza di potenziale protezione da ciascun pianeta.

Schematizzate le distanza massime tra pianeti e satelliti attraverso la matrice di dati di coefficienti

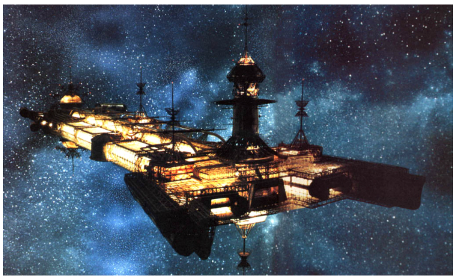
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } d_{ij} \le D^+, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m,$$

e scelte le famiglie di variabili

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se viene costruita una base sul satellite } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad j = 1,\dots,m,$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il pianeta } i \text{ viene protetto dalla base sul satellite } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m,$$

parte della formulazione è data dai vincoli riportati qua sotto:



$$\begin{aligned} \max \quad & \\ & \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij} \le 1 & i = 1,\dots,n \\ & \sum_{j=1}^{m} y_j \le k & \\ & y_j \in \{0,1\},\ x_{ij} \in \{0,1\} & i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m. \end{aligned}$$

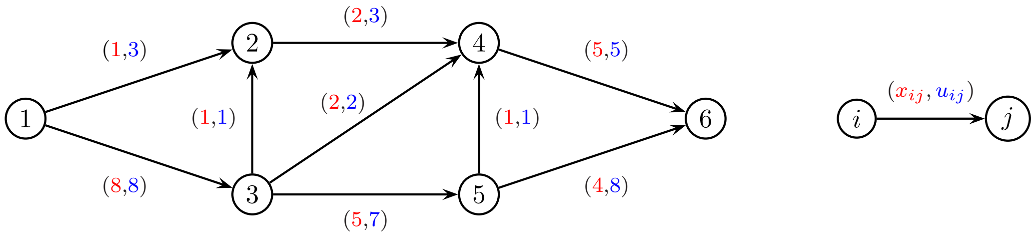
a) Selezionare tra le funzioni obiettivo ed i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

- A $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_{ij}$ (funzione obiettivo)
- B $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j$ (funzione obiettivo)
- C $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j = 1 \quad i = 1,\dots,n$
- D $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\Big(c_j y_j + \sum_{i=1}^{n} v_i a_{ij} x_{ij}\Big) \le C$
- E $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\Big(c_j y_j + v_i a_{ij} x_{ij}\Big) \le C$
- F $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \le p_j y_j \quad j = 1,\dots,m$

G $\sum_{j=1}^{m} p_j y_j \leq \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij} \quad i = 1, \ldots, n$

H $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \geq 1 \quad i = 1, \ldots, n$

2) Si consideri il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sul grafo seguente:



a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Il valore del flusso riportato in figura nel taglio $(\{1,2\},\{3,4,5,6\})$ è 11

B La capacità del taglio $(\{1,2\},\{3,4,5,6\})$ è 11

b) Qual è un cammino aumentante?

I $\{2,4,5,6\}$ II $\{1,2,3,5,6\}$ III $\{1,2,4,6\}$

c) Quale dei seguenti è un taglio di capacità minima?

I $(\{1,2\},\{3,4,5,6\})$ II $(\{1,2,3,4,5\},\{6\})$ III nessuno dei due

d) Diminuendo la capacità dell'arco $(2,4)$ a $u_{24} = 2$, di quanto diminuisce il valore del flusso massimo?

I 1 II 2 III 0

e) È possibile modificare la capacità di 1 solo arco in modo tale che il valore del flusso massimo sia 13? Giustificare la risposta.

3) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare ed il suo problema duale (D):

$$
(P) \quad \begin{array}{lrcrcr}
\max & 2\alpha x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \\
 & & & x_2 & \leq & 0 \\
 & & & -x_2 & \leq & 2
\end{array}
$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $\xi = (-1,0)$ è una direzione di recessione della regione ammissibile di (P)

B $\bar{x} = (0,-1)$ e $\bar{y} = (\alpha-1, \alpha+1, 0, 0)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari se e solo se $\alpha \geq 1$

b) Per quali valori di α la soluzione $\bar{y} = (\alpha-1, \alpha+1, 0, 0)$ è ottima per il duale (D) di (P)?

I $\alpha \leq -1$ II $\alpha \geq 1$ III $-1 < \alpha < 1$

c) Se $\alpha = 1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (P)?

I (P) è superiormente illimitato II $\{(0, -1)\}$ III $\{(-t, t-1) : 0 \le t \le 1\}$

d) Se $\alpha = -1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (D)?

I (D) è vuoto II $\{(0, 1, 0, 0)\}$ III $\{(t-1, t+1, 0, 0) : t \ge 1\}$

e) Scegliere una valore per α in modo tale che $\bar{x} = (-1, 0)$ sia l'unica soluzione ottima di (P). Giustificare la risposta.

4) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$(P) \quad \begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & \le & 4 \\ & -x_1 & + & x_2 & \le & 1 \\ & x_1 & - & 3x_2 & \le & 4 \\ & & & x_2 & \le & 2 \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{rrcrcrcrcl} \min & 4y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & + & 2y_4 & & \\ & 2y_1 & - & y_2 & + & y_3 & & & = & 1 \\ & y_1 & + & y_2 & + & 3y_3 & + & y_4 & = & 1 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \ge & 0. \end{array}$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{3, 4\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $\xi = (1, -1)$ è una direzione ammissibile per $x = (0, 0)$ e di crescita per (P)

B $x = (1, 2)$ e $y = (0, -1, 0, 2)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari

b) Quali sono gli indici entrante k ed uscente h nonché il passo di spostamento $\bar{\theta}$ individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $k = 1,\ h = 4,\ \bar{\theta} = 4/7$ II $k = 1,\ h = 3,\ \bar{\theta} = 1/2$ III $k = 2,\ h = 3,\ \bar{\theta} = 1$

c) Qual è la soluzione ottima di (D) individuata dall'algoritmo?

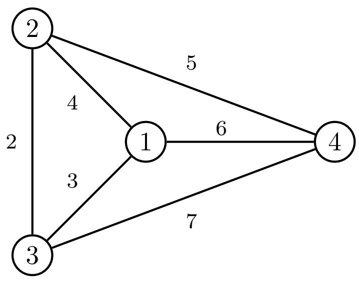
I $\bar{y} = (1/2, 0, 0, 1/2)$ II $\bar{y} = (0, -1, 0, 2)$ III $\bar{y} = (1/2, 0, 0, -1/2)$

d) Qual è un piano di taglio (di Gomory) che esclude la soluzione ottima $\bar{y}$ trovata alla domanda precedente?

I $y_2 + y_3 \le 1$ II $y_1 + y_4 \ge 2$ III $y_2 + y_3 \ge 1$

e) Modificare 1 solo termine noto di (P) in modo tale che la base di partenza dell'algoritmo risulti ottima. Giustificare la scelta effettuata.

5) Si considerino il problema del ciclo hamiltoniano di costo minimo sul seguente grafo



ed il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando il 3-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita per costo crescente degli archi, e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A L'arco $(3, 4)$ appartiene alla soluzione ammissibile di partenza

B Il valore ottimo del problema è 15

b) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $v_I = 16, v_S = 19$ II $v_I = 14, v_S = 18$ III $v_I = 14, v_S = 19$

c) Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

I 1 per $v_I(P_i) < v_S(P_i)$ II nessuno III 1 per ammissibilità

d) Quanti nodi vengono chiusi alla seconda ramificazione e per quale motivo?

I 1 per inammissibilità II nessuno III 1 per ammissibilità

e) Aumentare il costo di 1 solo arco in modo tale che l'algoritmo termini alla radice. Giustificare la scelta effettuata.